2026年度（令和8年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系　応用物理プログラム）

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．問題は，1ページから8ページまであります。解答用紙は，4枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3．下記表の問題を全て解答してください。**1題につき解答用紙1枚を使用して**解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
14	基礎物理数学
15	電磁気学
16	統計物理学
17	量子物理学

4．監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム，分野及び受験番号を4枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5．計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6．解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7．机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8．コンパス及び定規等は，使用できません。

9．時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10．スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11．試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12．試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 14　基礎物理数学　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　３次元デカルト座標系 (x, y, z) を考える。次の（１）～（３）の問いに答えよ。

（１）経路 C_1 を，原点O $(0,0,0)$ を始点とし，点A $(2,1,2)$ を終点とする線分とする。ベクトル場 $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2, x + z, 2y)$ とし，次の線積分を求めよ。

(1a) $\int_{C_1} \vec{F}\, dr$　　(1b) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$　　(1c) $\int_{C_1} \vec{F} \times d\vec{r}$

ただし $d\vec{r}$ は経路 C_1 に沿う微小変位を表す線素ベクトル，$dr = |d\vec{r}|$ である。

（２）xy 平面上にあり原点Oを中心とする半径 a の円板を考える。経路 C_2 を，円板の円周上を z 軸の正側から見て反時計回りに一周する経路とする。ベクトル場 $\vec{G}(x, y, z) = (\cos y, x(1 - \sin y), z)$ とし，以下の線積分を求めよ。ただし $d\vec{r}$ は経路 C_2 に沿う線素ベクトルである。

$$\oint_{C_2} \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

（３）$H(x, y, z)$ を微分可能なスカラー場とする。位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ における H の全微分は $dH(\vec{r}) = H(\vec{r} + d\vec{r}) - H(\vec{r})$ で定義される（ $d\vec{r}$ は微小変位を表すベクトル）。$dH(\vec{r})$を H の勾配と $d\vec{r}$ を用いて表せ。

Ⅱ　次の微分方程式の解 $y(t)$ を求めよ。ただし $a > 0,\ b > 0$ は定数であり，$t \geq 0$ とする。

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{2at - y}{t + b} \qquad y(t = 0) = 1$$

Ⅲ　次の（１）～（２）の問いについて答えよ。

（１）フーリエ級数に関する以下の設問に答えよ。

（１a）次の関数$f_1(t)$について，$f_1(t)=f_1(t+T)$を満たす基本周期Tを求めよ。

$$f_1(t)=\cos 4t+\sin 6t$$

（１b）$f_1(t)$を指数関数を用いて表せ。ただし，虚数単位をi，自然対数の底をeとする。

（１c）$f(t)$が基本角周波数ωの周期関数のとき，複素フーリエ係数c_nを用いて

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$$

と書ける。$f_1(t)$の複素フーリエ係数を求めよ。

（２）フーリエ変換に関する以下の設問に答えよ。

（２a）次の関数$f_2(t)$のグラフを描き，半値全幅を求めよ。ただし，半値全幅は関数の最大値の半分となる点間のt軸における幅であり，対数はそのままの表記でよい。

$$f_2(t)=e^{-|t|}$$

（２b）関数$f_2(t)$のフーリエ変換$F_2(\omega)$を求めよ。

（２c）関数$f_2(t)$と$F_2(\omega)$の半値全幅の積を求めよ。また，次の関数$f_3(t)$をフーリエ変換した関数$F_3(\omega)$の半値全幅を求めよ。ただし，$a>0$とする。

$$f_3(t)=e^{-a|t|}$$

問題１５　電磁気学　設問すべてについて解答すること。

I　以下の (1)～(8) の問いに答えよ。

図 1 に示すように，半径 a の導体球と内径 $b\,(a<b)$ の導体球殻を中心が一致するように置く。導体間の空間は真空とし，中心から空間の中の点までの距離を $r\,(a<r<b)$ とする。最初は，どちらの導体も帯電していないとする。真空の誘電率を ε_0 とする。

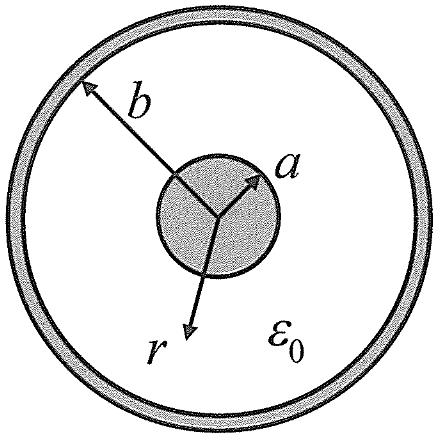

図 1

この系 (導体球と導体球殻) の静電容量を求めるために，正電荷 Q を導体球に与えた。

(1)　導体間の空間の点 $(a<r<b)$ における電場の大きさを答えよ。

(2)　2つの導体間の電位差を計算せよ。

(3)　この系の静電容量 C_1 を求めよ。

次に図 2 に示すように，導体間の空間 $(a<r<b)$ を誘電体で満たす。導体球の電荷は Q のままであった。この誘電体の比誘電率 ε_r は r の関数で，

$$\varepsilon_\mathrm{r}=\frac{b}{r}$$

と表されるとする。

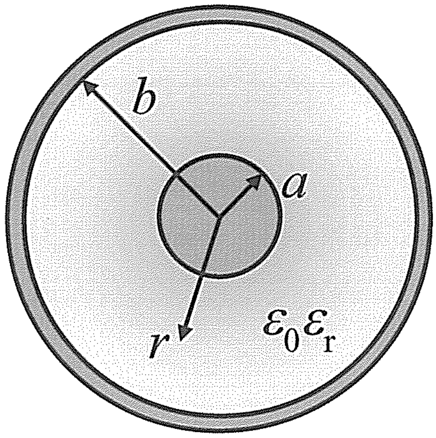

図 2

(4)　誘電体中の点 $(a<r<b)$ における電束密度の大きさを答えよ。

(5)　誘電体中の点 $(a<r<b)$ における電場の大きさを答えよ。ただし，解答に ε_r を用いてはいけない。

(6)　2つの導体間の電位差を計算せよ。

(7)　この系の静電容量 C_2 を求めよ。

(8)　C_1 と C_2 はどちらが大きいか答えよ。

II　以下の (1)〜(4) の問いに答えよ。

xy 平面上における点電荷の運動を考える。図 3 のように，電荷 q の点電荷が x 軸上を速さ v で等速直線運動している。v は光速度に比べて十分小さい。時刻 $t = 0$ のとき，点電荷は原点 O にある。空間は全て真空とし，真空の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 とする。

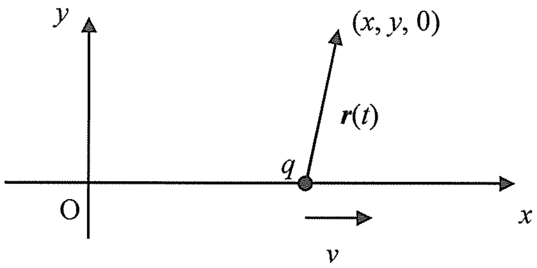

図 3

時刻 t のとき，点電荷から座標 $(x, y, 0)$ に向かうベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とし，その大きさを r とする。

(1)　距離 r を求めよ。

以下の設問では，時刻 t で座標 $(x, y, 0)$ における指定された物理量を求めよ。解答に r を用いてもよい。

(2)　電場 $\boldsymbol{E}$ の x 成分 E_x と y 成分 E_y を求めよ。

(3)　変位電流密度 $\boldsymbol{j}$ の x 成分 j_x と y 成分 j_y を求めよ。

(4)　点電荷がつくる磁場に対して，ビオサバールの法則が成り立つとして，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の z 成分 B_z を求めよ。

問題 16　統計物理学　設問すべてについて解答すること。

I　対象系は，成分 1 の原子N_1個と成分 2 の原子N_2個から出来ており（$N_1, N_2 \gg 1$），絶対温度Tで熱平衡状態にある。全ての原子は立方格子点上に隙間無く並んでおり，系の体積はTに依らず一定である。系の内部エネルギーは，各原子のエネルギーの和で書け，各原子のエネルギーは成分に依らず $-a$ または 0 となりうる（$a > 0$）。各原子の位置は，$T \leq T_{\mathrm{L}}$では変化せず，$T \geq T_{\mathrm{H}}$では時間経過と共に原子間で自由に入れ替わり続ける（$T_{\mathrm{H}} > T_{\mathrm{L}}$）。次の（１）～（４）の問いについて答えよ。なお，ボルツマン定数はk_{B}とし，解答には $\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$を用いて良い。

（１）任意に選んだ原子 1 個のエネルギーが $-a$ となる確率 p を求めよ。さらに，pについて，$T = 0$での値 $p(0)$，$T \gg a/k_{\mathrm{B}}$での値 $p(\infty)$を書け。

（２）$T \leq T_{\mathrm{L}}$の系について，内部エネルギー U，ヘルムホルツの自由エネルギー F，エントロピー S を求めよ。さらに，系の熱容量 C を求めよ。

（３）$T \geq T_{\mathrm{H}}$の系について，混合のエントロピーを求めよ。さらに，全原子数（つまり$N_1 + N_2$）が一定の状況で，混合のエントロピーが最大となる場合の $\frac{N_1}{N_2}$を，導出過程を含めて書け。

（４）$\frac{N_1}{N_2} = 1$ の系に対して，TをT_{L}からT_{H}まで少しずつ上げる過程において，熱容量 C はどのように変化すると考えられるか，理由を含めて説明せよ。

Ⅱ　スピン量子数$s = \frac{3}{2}$で質量mの自由フェルミ粒子N個からなる系（$N \gg 1$）が，絶対温度Tで，x, y, zの３方向の長さがTに依存せずLである空間（体積$V = L^3$）に周期境界条件で存在し，熱平衡状態にある。次の（１）～（５）の問いについて答えよ。なお，ボルツマン定数はk_{B}とし，プランク定数を2πで割った定数は$\hbar$とする。

（１）　粒子を波数ベクトル $\vec{k}$の複素平面波で表す際，同一の$\vec{k}$でとりうるスピン状態の量子数s_zの値を全て書け。さらに，その粒子のエネルギーを書け。

（２）　周期境界条件のため離散的となっている波数ベクトル $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$に関して，波数空間中の単位体積あたりにとりうる，異なる$\vec{k}$の個数を書け。

（３）　系の内部エネルギー Uが$T = 0$において最小値U_0となる際，粒子がとる波数ベクトルの最大値k_{F}を書け。さらに，U_0を書け。

（４）　系の熱容量 C は，$0 \leq T \ll \frac{U_0}{Nk_{\mathrm{B}}}$において$T^a$に比例する。次数$a$を，理由を含めて説明せよ。

（５）　Cは，$T \gg \frac{U_0}{Nk_{\mathrm{B}}}$において$T^b$に比例する。次数$b$を，理由を含めて説明せよ。

問題１７　量子物理学

設問すべてについて解答すること。プランク定数を 2π で割った定数を $\hbar$ とする。

I　ハミルトニアン $\hat{H}_0$ で記述される量子系を考える。$\hat{H}_0$ には 2 つの異なる離散的な固有値 E_1, E_2 $(E_1 \neq E_2)$ があり，それらに属する固有状態 $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ がそれぞれ固有値方程式

$$\hat{H}_0|\phi_1\rangle = E_1|\phi_1\rangle, \quad \hat{H}_0|\phi_2\rangle = E_2|\phi_2\rangle$$

を満たしている。この系の任意の状態は，これら 2 つの固有状態の線形結合を用いて表されるとする。以下で状態はいずれも規格化されているものとする。

（１）$\hat{H}_0$ のエルミート性を用いて，エネルギー固有値 E_1, E_2 が実数となることを示せ。また，固有状態 $|\phi_1\rangle$ と $|\phi_2\rangle$ とが直交すること ($\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$) を示せ。

（２）この系の時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle$ が従う時間依存シュレーディンガー方程式を記せ。

（３）一般にこの系の時刻 t における状態は

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|\phi_1\rangle + c_2(t)|\phi_2\rangle$$

と表される。この係数 $c_1(t)$, $c_2(t)$ が従う微分方程式を記せ。

（４）時刻 $t=0$ での状態が $|\psi(0)\rangle = \alpha|\phi_1\rangle + \beta|\phi_2\rangle$ (α, β は複素定数) と表されるとき，時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。また，その状態に対するエネルギーの期待値を求め，それが時刻 t によらず一定であることを示せ。

この系にポテンシャル $\hat{V}$ で表される外場が加わり，ハミルトニアンが $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ になったとする。状態 $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ に対する $\hat{V}$ の行列要素は $\langle\phi_1|\hat{V}|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\hat{V}|\phi_2\rangle = 0$, $\langle\phi_1|\hat{V}|\phi_2\rangle = v$, $\langle\phi_2|\hat{V}|\phi_1\rangle = v^*$ (v は 0 でない複素数で，v^* は v の複素共役) である。

（５）ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有状態を $|\psi\rangle = \alpha|\phi_1\rangle + \beta|\phi_2\rangle$ とする。この状態を固有値方程式 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ に代入し，両辺と $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ との内積をとると，係数 α, β および固有値 E の満たすべき方程式が 2 次の正方行列 H を用いて

$$\mathsf{H}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$$

のような行列の固有値方程式の形に表される。行列 H を E_1，E_2，v，v^* を用いて 2 行 2 列の成分表示で表せ。

（６）$\hat{H}$ の 2 つの固有値を求めよ。また，それらの差は $\hat{H}_0$ の 2 つの固有値の差に比べてどうなるか，以下の ①〜④ から正しいものを一つ選べ。

① 固有値の差は増大する。

② 固有値の差は減少する。

③ v の値によって固有値の差が増大する場合と減少する場合がある。

④ 固有値の差は変化しない。

II　1次元調和振動子について，以下の設問（1）～（7）に答えよ。

1次元方向を x 方向とする。質量 m の粒子がポテンシャル $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ によって束縛されている。このとき，ハミルトニアンは，

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_x{}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

と書ける。ここで，$\hat{p}_x$ は運動量演算子，ω は角振動数である。いま，演算子 $\hat{a}$ を以下のように定義する。

$$\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right)$$

この演算子のエルミート共役演算子 $\hat{a}^\dagger$ は，

$$\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right)$$

となる。また，ハミルトニアンは，$\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$を用いて以下のように表される。

$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$$

（1）交換子 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$ を求めよ。また，$[\hat{H},\hat{a}]$，$[\hat{H},\hat{a}^\dagger]$ を計算し，$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ の1次式で表せ。

（2）Ψ がハミルトニアン $\hat{H}$ の固有値 E に属する固有関数であるとき，$\hat{a}\Psi$ と $\hat{a}^\dagger\Psi$ もそれらが0とならない限り，$\hat{H}$ の固有関数となることを証明せよ。

（3）$\Psi_0(x)$ が基底状態の波動関数であるとき，$\hat{a}\Psi_0(x)=0$ となる理由を説明せよ。

（4）基底状態の規格化された波動関数 $\Psi_0(x)$ およびエネルギー固有値を求めよ。
波動関数の規格化定数には記号 C_0 を用いてよい。

（5）位置 x および運動量演算子 $\hat{p}_x$ を $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。

（6）基底状態にある調和振動子による，位置 x の期待値，x^2 の期待値，運動量演算子 $\hat{p}_x$ の期待値，$\hat{p}_x{}^2$ の期待値を求めよ。

（7）$\langle\hat{O}\rangle$ は，規格化された状態 $|\Psi\rangle$ における演算子 $\hat{O}$ の期待値 $\langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle$ を表す。基底状態にある調和振動子について，$\Delta x=\sqrt{\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle}$，$\Delta p_x=\sqrt{\langle(\hat{p}_x-\langle\hat{p}_x\rangle)^2\rangle}$ で定義される位置と運動量の揺らぎを求め，以下の不確定性関係が成り立つことを示せ。

$$\Delta x\Delta p_x=\frac{\hbar}{2}$$