問題14　基礎物理数学　出題意図・解答例

出題意図
・線積分の計算方法を理解しているか
・全微分型の常微分方程式の解法を理解しているか
・フーリエ級数及びフーリエ変換とその性質を理解しているか

Ⅰ（1）(1a) $(12, 6, 3)$
(1b) 12
(1c) $(3, -6, 0)$
（2）πa^2
（3）$dH(\vec{r}) = (\mathrm{grad}\, H(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = (\nabla H(\vec{r})) \cdot d\vec{r}$

Ⅱ　$y(t) = (at^2 + b)/(t + b)$

Ⅲ　<解答>

（１）

（１a）

$T=\pi$

（１b）

$$f_1(t)=-\frac{1}{2i}e^{-i6t}+\frac{1}{2}e^{-i4t}+\frac{1}{2}e^{i4t}+\frac{1}{2i}e^{i6t}$$

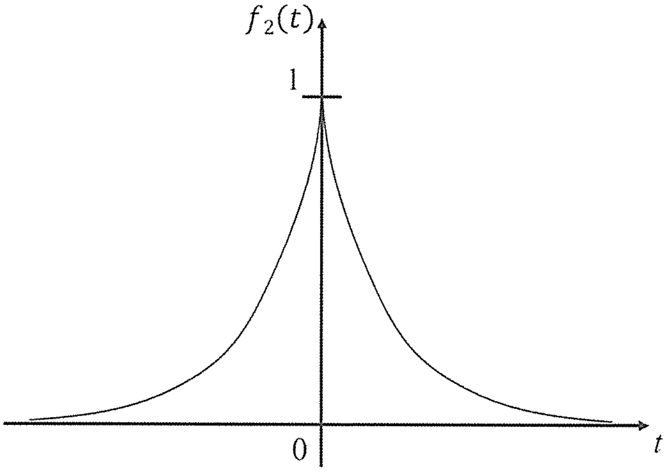
（１c）

$$c_{-3}=-\frac{1}{2i},\quad c_{-2}=\frac{1}{2},\quad c_2=\frac{1}{2},\quad c_3=\frac{1}{2i}$$

その他の$c_n=0$

（２）

（２a）



$f_2(t)$の半値全幅は、$2\ln 2$

（２b）

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$の場合

$$F_2(\omega)=\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}$$

（２c）

関数$f_2(t)$と$F_2(\omega)$の半値全幅の積は$4\ln 2$

関数$F_3(\omega)$の半値全幅は$2a$

問題 15　電磁気学　解答例

出題意図

I　球形コンデンサを題材として、電場、電束密度、電位が正しく計算できるかを問う。

II　電荷の運動を題材として、電場、変位電流、磁束密度が正しく計算できるかを問う。

I (1) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　　(2) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

(3) $C_1 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$

(4) $D = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$　　(5) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 br}$

(6) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\log_e \dfrac{b}{a}$

(7) $C_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 b}{\log_e \dfrac{b}{a}}$

(8) C_2

II (1) $r = \sqrt{(x-vt)^2 + y^2}$

(2) $E_x = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\dfrac{x-vt}{r}$、$E_y = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\dfrac{y}{r}$

(3) $j_x = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = \dfrac{qv}{4\pi}\cdot\dfrac{2(x-vt)^2 - y^2}{r^5}$

$j_y = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = \dfrac{qv}{4\pi}\cdot\dfrac{3y(x-vt)}{r^5}$

(4) $B_z = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{qvy}{r^3}$

問題16　統計物理学　出題意図・解答例

出題意図

Ⅰ　統計物理学の基本量であるヘルムホルツの自由エネルギー，内部エネルギー，エントロピーの式が書け，それらの式の解析的な展開ができることを，離散的なエネルギー準位を持つ比較的単純な系に対して確認する問題である。また，多成分系で特に重要となる混合のエントロピーの式を書けること，混合のエントロピーが混合比によって変化する様子，温度上昇によるエントロピーの増加から熱容量が計算できることを理解しているか確認している。

Ⅱ　半整数のスピン量子数を持つ量子粒子系はフェルミ統計に従うこと，温度ゼロでのフェルミ粒子系に対して粒子のエネルギーおよび波数の分布，温度上昇によるそれらの分布の変化を確認する問題である。また，フェルミ粒子は高温で古典粒子になること，フェルミ粒子系の熱容量に関する低温での振る舞いを理解しているか確認している。

解答例

Ⅰ

（１）　エネルギー準位毎の存在確率が $\exp(-\beta\times[\text{エネルギー準位}])$ に比例することを踏まえると，$p=\frac{\exp(\beta a)}{1+\exp(\beta a)}$ ．また，$p(0)=1$，$p(\infty)=\frac{1}{2}$ ．

（２）　$U=-(N_1+N_2)a\frac{\exp(\beta a)}{1+\exp(\beta a)}$ ．　$F=-\frac{N_1+N_2}{\beta}\ln(1+\exp(\beta a))$ ．

$$S=\frac{U-F}{T}=-(N_1+N_2)\frac{a}{T}\frac{\exp(\beta a)}{1+\exp(\beta a)}+k_{\mathrm{B}}(N_1+N_2)\ln(1+\exp(\beta a))\ .$$

体積一定であるので，熱容量は $C=T\frac{dS}{dT}=\frac{dU}{dT}$ により計算できる．従って，

$$C=T\frac{dS}{dT}=\frac{dU}{dT}=(N_1+N_2)\frac{a^2}{k_BT^2}\frac{\exp(\beta a)}{(1+\exp(\beta a))^2}\ .$$

（３）　混合のエントロピーは，$-k_{\mathrm{B}}\left[N_1\ln\frac{N_1}{(N_1+N_2)}+N_2\ln\frac{N_2}{(N_1+N_2)}\right]=-k_{\mathrm{B}}(N_1+N_2)[x\ln x+(1-x)\ln(1-x)]$ ここで $x=\frac{N_1}{(N_1+N_2)}$ である．$\frac{d}{dx}[x\ln x+(1-x)\ln(1-x)]=\ln\frac{x}{1-x}=0$ なので，

原子あたりの混合のエントロピーは，$x = 0.5$で極値となる．この極値は混合のエントロピーの最大値に相当するので，$\frac{N_1}{N_2} = 1$.

（4） TをT_{L}からT_{H}まで少しずつ上げる過程で，系のエントロピーには，混合のエントロピーの寄与が追加される．よって，この過程でも $C = \frac{dQ}{dT} = T\frac{dS}{dT}$ は成立するが（dQは系に流入した熱量），このSには（2）で求めたSに，混合のエントロピーが加わる（$C = \frac{dU}{dT}$は成立しないことに注意）．従ってCは，TをT_{L}から上げるに従い，固体が融解する状況に似て，混合のエントロピーのために追加的に上がり，ピークを経て，下がると予想できる．

II

（1） $s_z = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$． 粒子のエネルギーは，$\frac{(\hbar k)^2}{2m}$ ．

（2） 波数空間中の単位体積当たりにとりうる波数ベクトルの個数は $\frac{V}{(2\pi)^3}$ ．

（3） $4\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^{k_{\mathrm{F}}} 4\pi k^2 dk = N$と書けるので，$k_{\mathrm{F}} = \left(\frac{3\pi^2 N}{2V}\right)^{1/3}$ ．

k^2に対する，$k = 0$からk_{F}までのとりうる波数ベクトルに関する平均は $\frac{\int_0^{k_{\mathrm{F}}} k^2 4\pi k^2 dk}{\int_0^{k_{\mathrm{F}}} 4\pi k^2 dk} = \frac{3}{5}{k_{\mathrm{F}}}^2$ であるので，$U_0 = N\frac{\hbar^2}{2m}\frac{3}{5}\left(\frac{3\pi^2 N}{2V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3N\hbar^2}{10m}\left(\frac{3\pi^2 N}{2V}\right)^{\frac{2}{3}}$ ．

（4） $0 \leq T \ll \frac{U_0}{Nk_{\mathrm{B}}}$においては，$T = 0$での状況を基準として，エネルギーが$\left[\frac{\hbar^2}{2m}{k_{\mathrm{F}}}^2 - k_{\mathrm{B}}T, \frac{\hbar^2}{2m}{k_{\mathrm{F}}}^2\right]$程度の範囲の粒子それぞれが，$k_{\mathrm{B}}T$程度だけエネルギーを高める．従って$U$は，$T^2$に比例した分だけ増大する．体積一定で単成分系であるので，$C = \frac{dU}{dT}$で計算でき，Cは上の議論からTに比例するので，$a = 1$.

（5） $T \gg \frac{U_0}{Nk_{\mathrm{B}}}$においては，粒子は古典粒子となり，粒子毎に$k_{\mathrm{B}}T$程度のエネルギーを持つ．従って，$U$の$T$に依存する項は，$T$の１次項である．$C = \frac{dU}{dT}$は$T^0$に比例するので，$b = 0$.

問題１７（量子物理学）

出題の意図

I	量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式とその解に関して，以下についての理解度を問う。 • エルミート演算子の固有値と固有関数に関する基本的性質を導けるか。 • 定常状態の解を用いて時間依存シュレーディンガー方程式の解を求め，エネルギー期待値を計算できるか。 • エネルギー固有値問題に対する行列方程式を導出し，その解を計算できるか。
II	演算子法を用いた１次元調和振動子ハミルトニアンの固有値問題の解法に関して，以下についての理解度を問う。 • 昇降演算子の基本的な交換関係を導けるか。 • 昇降演算子を用いてエネルギー固有値および固有関数を構成できるか。 • 昇降演算子を用いて位置や運動量の期待値および揺らぎを計算し，不確定性関係を導出できるか。

解答例

I.

（１）固有値方程式 $\hat{H}_0|\phi_i\rangle = E_i|\phi_i\rangle$ $(i=1,2)$ の両辺のエルミート共役をとると $\langle\phi_i|\hat{H}_0 = E_i^*\langle\phi_i|$ であるから

$$\begin{aligned}\langle\phi_i|\hat{H}_0|\phi_i\rangle &= \langle\phi_i|\left(E_i|\phi_i\rangle\right) = E_i \\ &= \left(E_i^*\langle\phi_i|\right)|\phi_i\rangle = E_i^*, \quad \therefore\ E_i = E_i^* = \text{実数}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\phi_1|\hat{H}_0|\phi_2\rangle &= (E_1\langle\phi_1|)|\phi_2\rangle = E_1\langle\phi_1|\phi_2\rangle \\ &= \langle\phi_1|(E_2|\phi_2\rangle) = E_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle\end{aligned}$$

$$(E_1 - E_2)\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0, \quad \therefore\ \langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$$

（２）$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_0|\psi(t)\rangle$$

（３）$$i\hbar\frac{dc_1(t)}{dt} = E_1c_1(t), \quad i\hbar\frac{dc_2(t)}{dt} = E_2c_2(t).$$

（４）上問の方程式の初期条件 $c_1(0)=\alpha$, $c_2(0)=\beta$ を満たす解は

$$c_1(t) = \alpha e^{-iE_1t/\hbar}, \quad c_2(t) = \beta e^{-iE_2t/\hbar}$$

$$\therefore\ |\psi(t)\rangle = \alpha e^{-iE_1t/\hbar}|\phi_1\rangle + \beta e^{-iE_2t/\hbar}|\phi_2\rangle.$$

よってエネルギーの期待値は

$$\bar{E} = \langle\psi(t)|\hat{H}_0|\psi(t)\rangle = |c_1(t)|^2E_1 + |c_2(t)|^2E_2 = |\alpha|^2E_1 + |\beta|^2E_2$$

であり，時間によらず一定。

（5）　$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} E_1 & v \\ v^* & E_2 \end{pmatrix}$

（6）$\hat{H}$ の固有値 E は特性方程式 $\det(\mathsf{H} - E\,\mathsf{I}) = 0$ (I は 2 次の単位行列) より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} E_1 - E & v \\ v^* & E_2 - E \end{vmatrix} &= (E - E_1)(E - E_2) - |v|^2 \\ &= E^2 - (E_1 + E_2)E + E_1E_2 - |v|^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - 4(E_1E_2 - |v|^2)}}{2} \\ &= \frac{E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|v|^2}}{2} \end{aligned}$$

2 つのエネルギー固有値の差は

$$\Delta E = \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|v|^2} > |E_1 - E_2|$$

したがって，v の値によらず固有値エネルギーの差は増大する。答：①

問題１７－II　解答例

（１）$[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=1$，$[\hat{H},\hat{a}]=-\hbar\omega\hat{a}$，$[\hat{H},\hat{a}^{\dagger}]=\hbar\omega\hat{a}^{\dagger}$

（２）$\hat{H}\hat{a}\Psi=\left(-\hbar\omega\hat{a}+\hat{a}\hat{H}\right)\Psi=\left(E-\hbar\omega\right)\hat{a}\Psi$

$$\hat{H}\hat{a}^{\dagger}\Psi=\left(\hbar\omega\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}^{\dagger}\hat{H}\right)\Psi=\left(E+\hbar\omega\right)\hat{a}^{\dagger}\Psi$$

（３）$\hat{a}\Psi_0$ は基底状態よりも $\hbar\omega$ だけ低いエネルギー状態の固有関数である。
基底状態 Ψ_0 は最もエネルギーの低い状態であり、それ以下の状態は存在しないため、$\hat{a}\Psi_0(x)=0$ となる。

（４）$\hat{a}\Psi_0(x)=\sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\dfrac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right)\Psi_0=0$

$$x\Psi_0=-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\Psi_0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\Psi_0\right)=-\frac{m\omega}{\hbar}x$$

両辺積分すると，$\Psi_0(x)=C_0\exp\left(-\dfrac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ と求められる。

基底状態のエネルギーは，$E_0=\dfrac{1}{2}\hbar\omega$

（５）$\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}=\sqrt{\dfrac{2m\omega}{\hbar}}x \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})$

$$\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}=i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\hat{p}_x \quad\Rightarrow\quad \hat{p}_x=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger})$$

（６）$\langle x\rangle=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\Psi_0^*(x)x\Psi_0(x)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int dx\Psi_0^*(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})\Psi_0=0$

$$\langle x^2\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\int dx\Psi_0^*(x)(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})^2\Psi_0(x)=\frac{1}{m\omega^2}\int dx\Psi_0^*\hat{H}\Psi_0=\frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle p_x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx\Psi_0^*(x)\hat{p}_x\Psi_0(x)=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\int dx\Psi_0^*(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger})\Psi_0=0$$

$$\langle p_x^2\rangle=-\frac{m\hbar\omega}{2}\int dx\Psi_n^*(x)(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger})^2\Psi_n(x)=\frac{m\hbar\omega}{2}$$

（７）位置と運動量の揺らぎを計算して代入すると，

$$\Delta x\Delta p_x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}=\frac{\hbar}{2}$$

となり，不確定性関係が示された。