2026年度（令和8年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（情報工学系　　ネットワークプログラム、知能情報プログラム、

メディア情報プログラム、情報数理プログラム）

注 意 事 項

1．　試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．　問題は，１ページから１８ページまであります。解答用紙は，６枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3．　■ネットワークプログラム，知能情報プログラム，メディア情報プログラム：下記表の問題番号25から27の問題を全て解答してください。

■情報数理プログラム：問題番号25から30の中から３題を選択し解答してください。

（注）すべてのプログラムにおいて，<u>１題につき解答用紙１枚を使用して</u>解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
25	計算機ソフトウェア
26	計算機ハードウェア
27	情報数学
28	微分積分・線形代数
29	数理科学１
30	数理科学２

4．　監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム及び受験番号を３枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5．　計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6．　解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7．　机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8．　コンパス及び定規等は，使用できません。

9．　時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10．　スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11．　試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12．　試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 25　計算機ソフトウェア　設問についてすべて解答すること。

I.　次の(1)から(2)の問いについて答えよ。

辺に重みがないグラフ構造のうち、ノード間に親子関係があり、親ノードは 1 つか 2 つの子ノードしか持たない二分木を考える。図 1 は各ノードの要素に整数値を持つ二分木の例である。二分木に含まれるノードをある規則によって訪問し、各ノードの要素を書き出すことを考える。図 2 は二分木の指定されたノードを起点としてその部分木に含まれるすべてのノードを訪問する 2 種類のアルゴリズムである。ここで n は二分木のあるノード番号を表し、配列 left[n]はノード n の左の子ノード番号、配列 right[n]は右の子ノード番号を表し、該当ノードが子ノードを持たない場合は NULL で表されている。配列 element[n]はノード n が持つ要素を表している。また、queue.push()・queue.pop()・queue.size()はキューに対する挿入・取り出しと返却・キューに含まれる要素数の返却、print()は指定された文字列を書き出す操作にそれぞれ対応し、キューの初期状態は要素を含まない空の状態とする。

(1) 図 1 の二分木の走査に関する以下の問いに答えよ。

(a) 二分木に含まれるノードを訪問するアルゴリズムには主に幅優先探索と深さ優先探索の 2 種類がある。図 2 に示された 2 つのアルゴリズムはそれぞれどちらに該当するか答えよ。

(b) 図 1 で表される二分木に対し、図 2 の 2 種類のアルゴリズムによって各ノードの要素を書き出した場合、出力される文字列をそれぞれ答えよ。

(c) 図 2 の TreeTraverseB において、ノードの要素の値が昇順に書き出されるようにアルゴリズムを修正せよ。解答は図の疑似コードに準じて作成せよ。

(d) 図 2 の TreeTraverseB と同等のアルゴリズムは、スタックを用いて非再帰的に記述することができる。問(c)の解答と同等の処理を非再帰的に記述するように図 3 のアルゴリズム TreeTraverseC()の空欄(ア)～(オ)を答えよ。データ構造として stack を利用してよいその際、データ x を stack に挿入する操作を stack.push(x)、stack からデータを取り出し返却する操作を stack.pop()、stack に含まれる要素数を返却する操作を stack.size()とし、stack の初期状態は要素を含まない空の状態とする。なお、それぞれの空欄は 1 つの式に対応し該当箇所の式が不要の場合は「無し」と回答せよ。

二分木は探索問題に応用することができ、各ノードが下記の条件を満たすように作られたものを二分探索木とよぶ。図 1 の二分木はその条件を満たす二分探索木の一例である。

条件: 左の子ノードを頂点とする部分木の各要素の値 ≦ 自ノードの要素の値 ≦ 右の子ノードを頂点とする部分木の各要素の値

(2) ノードの総数が N(ただし N は 2^k-1 とする)である二分探索木に関する以下の問に答えよ。

(a) 二分探索木の性質を利用し二分探索木の指定されたノードから目的の要素を効率的に探索できるように図 4 のアルゴリズム SearchElement()の空欄(カ)～(ク)を答えよ。

(b) 問(a)のアルゴリズムにおいて、目的の要素を探索する際に必要な時間計算量は木の構造によって異なる。最良と最悪の場合とは一般的にどのような構造かそれぞれ簡潔に答えよ。

(c) 問(b)の最良の場合と最悪の場合について、二分探索木で目的の要素を探索する際に必要な最悪の時間計算量をそれぞれ Big-Θ 表記で答えよ。

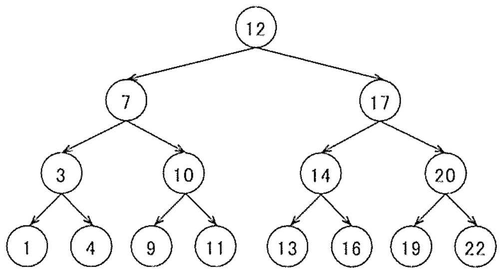


図 1　各ノードの要素に整数値を持つ二分木

```
TreeTraverseA( n )
    queue.push(n)
    while( queue.size() > 0)
        p = queue.pop()
        print( element[p] + " ")
        if( left[p] != NULL )
            queue.push( left[p] )
        if( right[p] != NULL )
            queue.push( right[p] )
```

```
TreeTraverseB( n )
    if( n != NULL )
        print( element[n] + " ")
        TreeTraverseB( left[n] )
        TreeTraverseB( right[n] )
```

図 2　二分木を走査し各ノードの要素の書き出しを行う 2 種類のアルゴリズム

```
TreeTraverseC( n )
    p = n
    while()
        while( p != NULL )
            【　(ア)　】
            【　(イ)　】
        if( 【　(ウ)　】 == 0 )
            break
        【　(エ)　】
        print( element[p] + " ")
        p = right[【　(オ)　】]
```

図 3　問(1)-(c)と同等の処理を非再帰的に記述したアルゴリズム

```
SearchElement(n, key)
    if( 【　(カ)　】 )
        return n
    if( 【　(キ)　】 )
        return SearchElement(left[n], key)
    else
        return 【　(ク)　】
```

図 4　指定された要素を持つノードを探索し該当するノード番号を返却するアルゴリズム

Ⅱ　次の（１）と（２）の問いについて答えよ。

（１）　アルファベット $\Sigma = \{a\}$ 上の言語に関する以下の問い(a)～(c)に答えよ。

(a)　言語 $L_1 = \{a^{2n} | n は 1 以上の整数\}$ を受理する決定性有限オートマトンを構成し状態遷移図を描け。ただし，受理状態は１つとすること。

(b)　状態数がkの決定性有限オートマトンM_1とその状態遷移図(有向グラフ)D_1について，M_1が長さがkより長い語を含む言語を受理(識別)可能であるとき，D_1には必ず有向閉路が存在することを示せ。

(c)　言語 $L_2 = \{a^{n^2} | n は 1 以上の整数\}$ を受理する決定性有限オートマトンが存在しないことを示せ。

（２）　以下の２つの文法 G_1, G_2 に関する以下の問い(a)～(d)に答えよ。

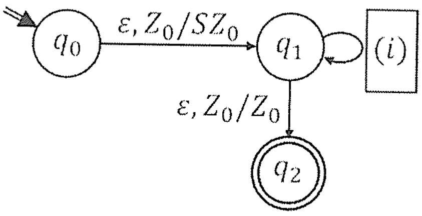
$G_1 = < N_1, \Sigma, P_1, S >$

ただし $N_1 = \{S, E\}, \Sigma = \{a, +, \times\}, P_1 = \{S \to E, E \to E + E, E \to E \times E, E \to a\}$

$G_2 = < N_2, \Sigma, P_2, S >$

ただし $N_2 = \{S, E, T\}, \Sigma = \{a, +, \times\}, P_2 = \{S \to E, E \to E + T, E \to T, T \to T \times E, T \to a\}$

(a)　文法G_1が生成する言語を受理する３状態の非決定性プッシュダウンオートマトンを構成したい。右の状態遷移図の空欄(i)に入るべき適切な答えを書け。ただし，答えは他の矢印に付けられたものと同じ形式で書くこと。また，図中のプッシュダウン記号(スタック記号)を$\Gamma = \{Z_0\} \cup N_1 \cup \Sigma$($Z_0$はボトム記号(ボトムマーカ))とし，状態$q_2$のみを受理状態とする。



(b)　文法 G_2 をチョムスキー標準形に変換した文法を $G_2' = < N_2', \Sigma_2, P_2', S >$とする。以下の空欄$(ii)$に入るべき適切な答えを書け。

$$N_2' = \{S, E, T, A_1, A_2, B_1, B_2\}, P_2' = \{A_2 \to +, B_2 \to \times, \boxed{\quad (ii) \quad}\}$$

(c)　語 $a + a \times a$ を文法 G_1およびG_2 で生成するときの導出木（構文解析木，構文木）を描け。もし導出木が複数ある場合はすべて列挙すること。

(d)　ある文法 G においてある語 w に対する導出木が複数存在する場合，w をあいまいな語と呼ぶ。G_2が生成する語がすべてあいまいな場合は解答用紙の「全部(all)」を丸で囲み，$a + a \times a$ 以外の長さ５のあいまいな語を１つ示せ。または，G_2 があいまいでない語を生成可能な場合は「一部(part)」を丸で囲み，$a + a \times a$ 以外の長さ５のあいまいでない語を１つ示せ。

問題 26　計算機ハードウエア　設問についてすべて解答すること。

I　数値表現に関する以下の問い（1）～（4）に答えよ。ただし，括弧付きで示した添え字の数字は基数を表す。

（1）次の 8 ビットの 2 の補数表現で与えられた 2 進数を 10 進数に変換せよ。

(a) $10010110_{(2)}$

(b) $01101100_{(2)}$

（2）2 の補数で表現された $11110000_{(2)}$ を算術右シフト 2 回したときの結果を 10 進数に変換せよ。

（3）10 進小数である 0.624 を誤差 ± 0.001 以内で表現できる 2 進小数に変換せよ。

（4）$2025_{(r)} = 1045_{(10)}$ が成立する基数 r を求めよ。

II　ディジタル回路に関する以下の問い（1）～（4）に答えよ。

2 つの入力 $a, b \in \{0,1\}$ の半加算器（HA）の出力は，和 $s = a \oplus b$ および桁上がり $c = a \cdot b$ である。「$\cdot$」は AND 演算,「$+$」は OR 演算,「$\oplus$」は XOR 演算を意味する。なお，論理回路を図示する回答には，図 2-1 に示す MIL 記号を用いよ。

図 2-1: MIL 記号

（1）3 入力 $a, b, c_{\mathrm{in}} \in \{0,1\}$ が入力される全加算器（FA）を半加算器を用いて設計したい。

(a) 全加算器の和 s およびキャリー c_{out} について真理値表を作成せよ。

(b) 全加算器の出力である和 s およびキャリー c_{out} を論理式で表せ。

(c) 全加算器を，図 2-2 の半加算器と MIL 記号を用いて図示せよ。

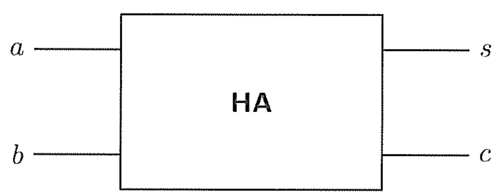


図 2-2: 半加算器

（2）3 入力 $a, b, c \in \{0,1\}$ と 2 つの制御信号 $s_0, s_1 \in \{0,1\}$ に対して，s_0, s_1 の状態に応じて出力を切り替える回路を設計したい。s_0, s_1 ともに 0 の時は，a, b の論理和 $a + b$ を出力し，s_0 が 0 かつ s_1 が 1 の時は，a, b の排他的論理和を出力し，s_0 が 1 の時は，3 入力 a, b, c の論理積を出力する $f(a, b, c, s_0, s_1)$ の論理式を示せ。

（3）3 ビット符号なし整数 $A = a_2a_1a_0$，$B = b_2b_1b_0$, $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ の和 $A + B$ をリップルキャリー加算器（Ripple Carry Adder; RCA）で計算したい。RCA とは，各ビットの全加算器を直列に接続し，前のビットのキャリー出力を次のビットのキャリー入力として逐次伝搬させる構成の加算器である。各全加算器は，2 つの入力ビット a_i, b_i，および前段からのキャリー入力 c_i を受け取り，出力として和 s_i と次段へのキャリー出力 c_{i+1} を生成する。なお，最下位ビットの初期キャリー入力 c_0 は 0 とする。

(a) 3 ビット RCA 全体の接続構成を示す論理回路図を示せ。なお，図 2-3 の全加算器を用いよ。

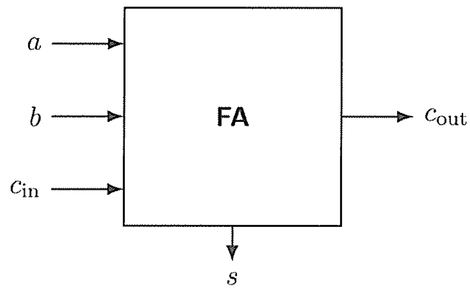


図 2-3: 全加算器（入力信号 a, b，キャリー入力 c_{in}，和 s，キャリー出力 c_{out}）

(b) n ビット RCA に拡張した場合を考える。加算結果が得られる遅延は 1 ビット RCA の何倍となるか答えよ。

（4）キャリールックアヘッド加算器（Carry Lookahead Adder; CLA）の導出と設計をしたい。CLA とは，(3) の RCA とは異なり各ビットで発生するキャリー信号を前方に伝播させる代わりに，論理的に一括で求めることで加算の高速化を図る回路である。ここでは，4 ビット符号なし整数 $A = a_3a_2a_1a_0$，$B = b_3b_2b_1b_0$, $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ の和 $A + B$ を考える。

(a) （1）で導出した全加算器において，伝播信号 p，生成信号 g を下記で定義する。

$$p = a \oplus b, \quad g = a \cdot b$$

各ビット $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対して，伝播 $p_i = a_i \oplus b_i$，生成 $g_i = a_i \cdot b_i$ とする。また，最下位桁キャリー入力を c_0 とする。そのとき，キャリー c_1, c_2, c_3, c_4 を $c_0, p_0, p_1, p_2, p_3, g_0, g_1, g_2, g_3$ のみを用いる論理式として導出せよ。

(b) CLA の遅延のボトルネックについて簡潔に論述せよ。なお上限を 40 文字とする。

(c) CLA の利点，欠点に関してそれぞれ簡潔に論述せよ。なお上限をそれぞれ 40 文字とする。

III　以下の問いに答えよ。

図 3-1 は MIPS プロセッサのデータパスを簡略化したブロック図である。このブロック図に関する解説を下記に示す。

- 各命令，各データはすべて 32 ビットで表現されるものとする。
- “命令” の [] 内の数字はビット位置を示す。例えば “命令 [16]” は命令データの 16 ビット目，“命令 [8-5]” は命令データの 8 ビット目から 5 ビット目の計 4 ビットを表す。なお，複数のビットで値を表す場合はビット位置の一番大きいビットを MSB とする。例えば “命令 [8-5]” で値 0001 を表す場合，“命令 [8]”=0，“命令 [7]”=0，“命令 [6]”=0，“命令 [5]”=1 となる。
- メモリ上のアドレスは 1 バイト=8 ビットごとに番地が割り振られる。よって各命令はメモリ上で 4 アドレスを占拠することになる。
- 図中の各ブロックは次の動作を行う。

PC(プログラムカウンタ): 現在の命令のアドレスを保持するために使用されるレジスタ。制御信号 PCLoad が 0 から 1 に変化したときに加算ユニットからデータを読み込む。

命令メモリ: “読み出しアドレス” で指定された番地の値を “命令 [31-0]” の 32 ビットで提供する。

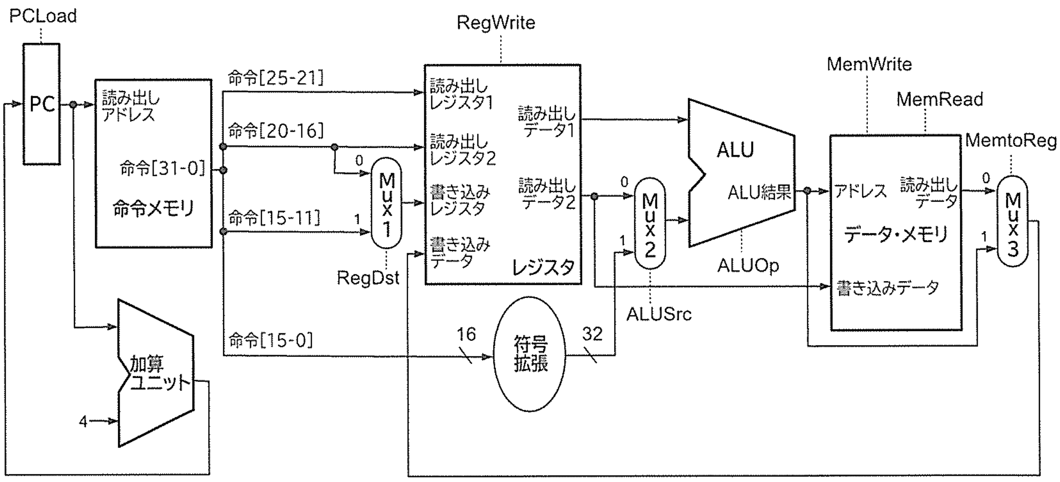


図 3-1: MIPS プロセッサのデータパス簡略図 (「コンピュータの構成と設計-第 6 版」より改変)

レジスタブロック:

- "読み出しレジスタ n" で指定された番号のレジスタ値を "読み出しデータ n" で提供する ($n = 1, 2$)。
- 制御信号 RegWrite=1 のとき，"書き込みレジスタ" で指定された番号のレジスタに "書き込みデータ" を書き込む。

加算ユニット: 2 入力値の加算を行う。加算値は 4 に固定されている。

データ・メモリ: メモリの "アドレス" で指定された番地に対し，下記の操作を行う。

- 制御信号 MemRead=1 のとき：その番地の値を "読み出しデータ" として提供する。
- 制御信号 MemWrite=1 のとき：その番地に "書き込みデータ" を書き込む。
- 制御信号 MemRead と制御信号 MemWrite は同時に 1 にならないものとする。

ALU: 入力 2 値に対して下記の演算を行い，結果を "ALU 結果" から提供する。

- 制御信号 ALUOp=0 のとき，ALU は加算を行う。
- 制御信号 ALUOp=1 のとき，ALU は減算を行う。

符号拡張: 入力された 16 ビットのデータを同値の 32 ビットのデータに拡張する。

Mux1～3: マルチプレクサであり，それぞれ制御信号 RegDst, ALUSrc, MemtoReg により制御される。

このプロセッサにおいて，下記の命令が実装してあるとしよう。

`add s1, s2, d1`

- 命令 [25-21]=`s1`, 命令 [20-16]=`s2`, 命令 [15-11]=`d1`
- 意味：`s1` レジスタの値と `s2` レジスタの値を足して `d1` レジスタに書き込む。

`load s1, d1, address`

- 命令 [25-21]=`s1`, 命令 [20-16]=`d1`, 命令 [15-0]= `address`
- 意味：`s1` レジスタの値に `address` を足した値を x とすると，メモリの x 番地の値をレジスタ `d1` に書き込む。

`write s1, d1, address`

- 命令 [25-21]=`s1`, 命令 [20-16]=`d1`, 命令 [15-0]= `address`
- 意味：`s1` レジスタの値に `address` を足した値を x とすると，メモリの x 番地にレジスタ `d1` の値を書き込む。

このとき，以下の問い（1）～（7）に答えよ。

（1）命令 [31-26] を用いて命令の種類を表現する場合，このプロセッサは，最大でいくつの命令を実装可能か。

（2）このプロセッサは，命令用に最大でいくつのレジスタを利用可能か。

（3）PC の値に 4 を加算する“加算ユニット”の役割を簡潔に説明せよ。

（4）命令 `add 1, 2, 3` を実行する場合の命令 [25-0] を 2 進数で表せ。ただし，ドントケアとできる場合はドントケアとし，記号 $*$ を用いること。また，答えは下位ビットから 4 桁ごとにカンマで区切ること。

（5）命令 `load 1, 2, 15` を実行する場合の命令 [25-0] を 2 進数で表せ。ただし，ドントケアとできる場合はドントケアとし，記号 $*$ を用いること。また，答えは下位ビットから 4 桁ごとにカンマで区切ること。

（6）命令 `add`，`load`，`write` を実行する場合，各制御信号の値 (PCLoad を除く) はいくつになるか。下記表 3-1 を埋めよ。ただし，ドントケアとできる場合はドントケアとし，記号 $*$ を用いること。なお，解答にあたっては解答用紙に表 3-1 を転記して作成すること。また，命令 add のときの MemRead の値は $*$ とする。

表 3-1: 各制御信号

命令	RegDst	RegWrite	ALUSrc	ALUOp	MemWrite	MemRead	MemtoReg
add						*	
load							
write							

（7）今，新しい命令 `jump` を実装したい。

`jump s1, address`

- 命令 [25-21]=`s1`, 命令 [20-16]=ドントケア, 命令 [15-0]= `address`
- 意味：`s1` レジスタの値に `address` を足した番地の命令を次に実行する。

このとき，図 1 をどのように変更すれば良いか，Mux3，加算ユニット，PC に加え，新たなマルチプレクサ Mux4 を用いて簡潔に述べよ。

問題 27　情報数学　設問すべてについて解答すること。

I　二つの独立な確率変数 $S = i,\ i \in \{0,1,2\}, T = j,\ j \in \{0,1,2,3\}$ を考える。

以下のように生起確率が与えられるとする。

$$P(S=0) = \frac{1}{4},\ \ P(S=1) = \frac{1}{2},\ \ P(T=0) = \frac{1}{4},\ \ P(T=1) = \frac{1}{4},\ \ P(T=2) = \frac{1}{4}$$

そして，次の算術演算により得られる確率変数 X, Y を考える。

$$\begin{aligned} X &= (S+T) \mod 3 \\ Y &= (S \times T) \mod 3 \end{aligned}$$

ここで　mod　は剰余演算子である。次の（1）～（7）の問いに答えよ。解答においては，導出過程も簡潔に示すこと。また，最も簡約化した形で答えを示すこと。ここで簡約化とは，分数に関しては既約形，対数に関しては最も簡単な形（例：$\log_2 6 \to 1 + \log_2 3$）に変形することを指す。$0 \log_2 0 = 0$ とする。

（1）エントロピー $H(S)$ を求めよ。

（2）確率 $P(X)$ を求めよ。

（3）確率 $P(Y)$ を求めよ。

（4）エントロピー $H(Y)$ を求めよ。

（5）条件付き確率 $P(Y|X)$ を求めよ。

（6）条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を求めよ。

（7）相互情報量 $I(X;Y)$ を求めよ。

Ⅱ　集合$A=\{1,2,3\}$および$B=\{2,3,4,5\}$に対して次の（１）～（３）の問いについて答えよ。各設問では集合Zに関するべき集合を2^Zのように書く。

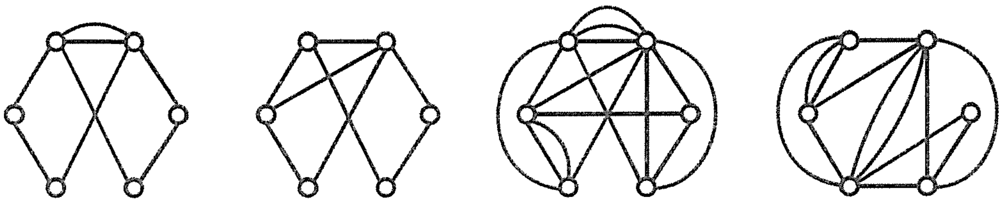
（１）　Aに関するべき集合2^Aの要素をすべて列挙せよ。

（２）　Bに関するべき集合2^Bの要素数$|2^B|$を求めよ。導出過程も簡潔に示すこと。

（３）　$|2^A \cup 2^B|$を求めよ。導出過程も簡潔に示すこと。

Ⅲ　次の（１），（２）の問いについて答えよ。

（１）　以下の図に示すグラフa, b, c, dの中でオイラー閉路を持つものをすべて答えよ。また，その理由も説明せよ。



グラフa　　グラフb　　グラフc　　グラフd

（２）　頂点の集合V={1,2, ..., 10}からなり，以下の式で辺が定義される３つのグラフG_1，G_2，G_3についてそれぞれの総次数を求めよ。導出過程も簡潔に示すこと。

$G_1(V,E_1), E_1$={ $\{x, y\}$ ｜ $x+y$が偶数, $x, y \in V$ }

$G_2(V,E_2), E_2$={ $\{x, y\}$ ｜ $x+y$が奇数, $x, y \in V$ }

$G_3(V,E_3), E_3$={ $\{x, y\}$ ｜ xyが３の倍数, $x, y \in V$ }

Ⅳ　あるパラメータ$a, b \in \mathbb{R}$に関して写像$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$が

$$h(x) = \begin{bmatrix} \max(a-x, 0) \\ \max(a+x, 0) \end{bmatrix}, g(y_1, y_2) = by_1 + y_2$$

のように定義されているとき，次の（１）～（３）の問いについて答えよ。（２），（３）の解答については導出過程も簡潔に示すこと。導出過程として図を用いても良い。

（１）　$y_1 = \max(a-x, 0)$および$y_2 = \max(a+x, 0)$のそれぞれについて関数の形状を図示せよ。

（２）　写像hが単射となるためのaの条件を答えよ。

（３）　合成写像$g \circ h$が全単射となるためのaおよびbの条件を答えよ。

問題 28　微分積分・線形代数 設問すべてについて解答すること。

I 2 変数関数 f を

$$f(x,y)=y(2x-y)^2+3y^3-4y$$

とおく。このとき，次の (1) ~ (3) の問いに答えよ。

(1) 関数 f の停留点を求めよ。

(2) 関数 f の極値とそのときの (x,y) を求めよ。

(3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le 2x-y\le 2,\ 0\le y\le 1\}$$

で定める。D における関数 f の最大値と最小値を求めよ。

II 3 次正方行列 A を $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で定める。このとき，次の (1) ~ (5) の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) f の核 $\mathrm{Ker}(f)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ の基底を与えよ。

(3) $\mathrm{Ker}(f)$ の直交補空間 $\mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ の基底を与えよ。

(4) A を対角化する直交行列 P を与えよ。

(5) n を正の整数とする。A^n を求めよ。

問題 29　数理科学 1　設問すべてについて解答すること。

I 複素関数 f を

$$f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{z^3}$$

とおく。このとき，次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

(1) $z = 0$ を中心とする $f(z)$ のローラン級数を求めよ。

(2) 閉曲線 $C_1 \colon z = e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に対して複素積分 $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz$ の値を求めよ。

(3) $e^z + e^{-z} = 0$ をみたす複素数 z をすべて求めよ。

(4) 閉曲線 $C_2 \colon z = 2e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に対して複素積分 $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{f(z)}\,dz$ の値を求めよ。

II 2 階定数係数常微分方程式に関する次の (1) ~ (5) の問いに答えよ。ただし, 未知関数を

$$y : \mathbb{R} \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$$

とし，y' と y'' はそれぞれ y の 1 階導関数と 2 階導関数を表す。

(1) $y'' + y' - 2y = 0$ の一般解 $y(x)$ を求めよ。

(2) $y'' + y' - 2y = 2e^{-x}$ の一般解 $y(x)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $y(x)$ のうち，$y(0) = 1$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ をみたすものを答えよ。

(4) $y'' + y = 2e^{-x}$ および, $y(0) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ をみたす $y(x)$ を求めよ。

(5) 実数 a, b は $1 - a + b \neq 0$ をみたすとする。このとき，条件

$$y'' + ay' + by = 2e^{-x},$$
$$y(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

をすべてみたす $y(x)$ が存在するための必要十分条件を a, b で表せ。

問題 30　数理科学 2　設問すべてについて解答すること。

I 有限集合 X, Y に対して X が Y の部分集合であるとき $X \subseteq Y$ とかく。また，$|X|$ を X の要素数，$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$ を差集合とする。
E を有限集合とする。集合 I のすべての要素が E の部分集合であるとき，I は E の部分集合族であるという。E の部分集合族 I に対して，条件 (i)，(ii)，(iii) を

(i) 空集合 $\emptyset$ は I の要素である

(ii) もし $A \in I$ かつ $B \subseteq A$ であるならば，$B \in I$ である

(iii) もし $A, B \in I$ かつ $|B| = |A| + 1$ であるならば，ある $b \in B \setminus A$ が存在して $A \cup \{b\} \in I$ である

で定める。(i)，(ii)，(iii) が成り立つとき，I は独立集合の族であるという。このとき，次の (1) $\sim$ (4) の問いに答えよ。

(1) $E = \{1, 2, 3\}$ とする。$I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$ は独立集合の族であるか判定せよ。

(2) $E = \{1, 2, 3\}$ とする。$I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ は独立集合の族であるか判定せよ。

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$
とし，$E = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ とする。また

$$I = \{\emptyset\} \cup \{A \mid A \subseteq E,\ A \text{ に属する } |A| \text{ 個のベクトルは一次独立である }\}$$

とする。このとき I の要素をすべて列挙し，I が独立集合の族であるか判定せよ。

(4) E は有限集合であり，I は独立集合の族であるとする。さらに $M, M' \in I$ かつ $M \neq E$, $M' \neq E$ とする。このとき M, M' が次の 2 条件

- もし $A \in I$, $A \neq E$, $M \subseteq A \subseteq E$ であるならば，$A = M$
- もし $A' \in I$, $A' \neq E$, $M' \subseteq A' \subseteq E$ であるならば，$A' = M'$

をみたすならば $|M| = |M'|$ であることを証明せよ。

II $s>0,\ p>0,\ q>0$ に対し，広義積分

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx,\quad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束することが知られている。次の (1) 〜 (4) の問いに答えよ。

(1) $n>1$ とする。変数変換 $x=uv,\ y=(1-u)v$ により

$$D_n=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x}{n}\le y\le nx,\ \frac{1}{n}\le x+y\le n\right\}$$

に対応する uv 平面の部分集合 E_n を求めよ。

(2) $p>0,\ q>0$ とし，$D=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ とする。重積分

$$I=\iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

を 2 通りのしかたで計算することにより，

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=B(p,q)\Gamma(p+q)$$

を証明せよ。

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(4) 変数変換 $u=\dfrac{1}{1+x^4}$ を利用して

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

を証明せよ。