

2027 年度（令和 9 年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系 応用物理プログラム）

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は、1 ページから 8 ページまであります。解答用紙は、4 枚あります。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせてください。
3. 下記表の問題を全て解答してください。1 題につき解答用紙 1 枚を使用して解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
13	基礎物理数学
14	電磁気学
15	統計物理学
16	量子物理学

4. 監督者の指示に従って、問題番号、志望プログラム、分野及び受験番号を 4 枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。
5. 計算用紙は、問題冊子の白紙ページを利用してください。
6. 解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入してください。
7. 机の上には、受験票、黒の鉛筆・シャープペンシル、消しゴム、鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。
8. コンパス及び定規等は、使用できません。
9. 時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は、使用しないでください。
10. スマートフォン、携帯電話、ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し、それらの機器のアラームを解除してから、電源を切り、かばん等に入れてください。
11. 試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は、手をあげてください。
12. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 13 基礎物理数学

設問すべてについて解答すること。

I 3次元デカルト座標系 (x, y, z) を考える。次の (1), (2) の問いに答えよ。

(1) ベクトル場 $\vec{A}$ を以下で定義する。(1a)~(1d)を求めよ。

$$\vec{A} = (x^2y + yz, y^2z + zx^2, z^2x + xy^2)$$

(1a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

(1b) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

(1c) $\vec{\nabla}^2 \vec{A}$

(1d) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

ただし $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ はナブラ演算子である。

(2) 原点Oを中心とする半径 1 の球面全体の領域を S , 領域 S 上の微小面要素を dS とする。

$\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{B} = (z, 0, 0)$ とするとき, 以下の面積分を求めよ。

$$\int_S \vec{r} \times \vec{B} \, dS$$

II 以下の微分方程式の解 $x(t)$ を, (1) ~ (3) の手順に従って求めよ。

$$\frac{dx}{dt} + 2x = t x^{1/2} \quad (x > 0)$$

(1) $u = \sqrt{x}$ ($u > 0$) とおき, u の微分方程式として書き直せ。ただし結果に x を用いてはならない。

(2) (1) の微分方程式に対応する同次方程式の解を参考にして, $u(t)$ の一般解を求めよ。

(3) $x(t=0) = 1/4$ とする。解 $x(t)$ を求めよ。

Ⅲ 次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を次式で定義する。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

ただし, i は虚数単位, e は自然対数の底とする。また, 導出過程も記述せよ。

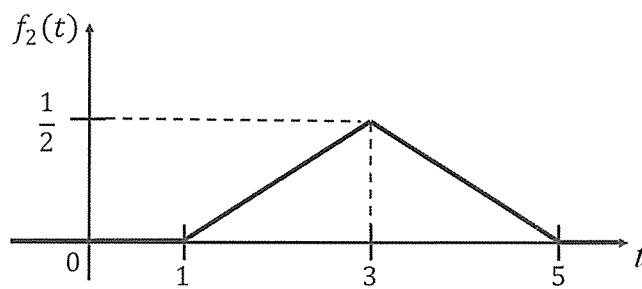
(1) 関数 $f(at)$ のフーリエ変換を, F を用いて表せ。導出にあたっては, 積分変数を $x = at$ と置換して求めよ。ただし, $a > 0$ とする。

(2) 関数 $f(t-b)$ のフーリエ変換を, F を用いて表せ。

(3) 次の関数 $f_1(t)$ のフーリエ変換 $F_1(\omega)$ を求めよ。

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 - |t| & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

(4) 図の関数 $f_2(t)$ のフーリエ変換 $F_2(\omega)$ を求めよ。



問題 14 電磁気学 設問すべてについて解答すること。

I 次の(1)～(6)の問いについて答えよ。

図1のように、断面半径 a の円柱状の導体(円柱電極)の周りに、内径 b のパイプ状の導体(中空電極)が、中心軸を共有する形で配置された構造を考える。これらの導体の抵抗は無視でき、また中空電極は接地している。十分に長い電極のうち、図1に示す長さ L の部分に着目することとして、以下の問いに答えよ。

まず、電極間を誘電率 ε の誘電体で満たした。円柱電極を帯電させたところ、長さ L の部分の電荷は Q ($Q > 0$) となった。十分な時間の経過後、中空電極の内側表面にも一定の電荷が誘起された。

- (1) 円柱電極表面、および中空電極内側表面における電荷面密度をそれぞれ求めよ。
- (2) 中心軸から距離 r ($a < r < b$) となる電極間の点 A における電場の大きさと向きを求めよ。
- (3) 長さ L の部分の静電容量を求めよ。

次に、電極間を抵抗率 ρ の物質で満たした。中空電極に対して円柱電極に一定電圧 V ($V > 0$) を印加した。十分な時間の経過後、円柱電極から中空電極に向かって定常電流が流れた。長さ L の部分に流れた電流を I とする。

- (4) 電極間の点 A における電場の大きさと向きを求めよ。
- (5) 電極間の電圧 V を、 I を用いて表せ。
- (6) 長さ L の部分における電極間の抵抗を、 I と V を使わずに答えよ。

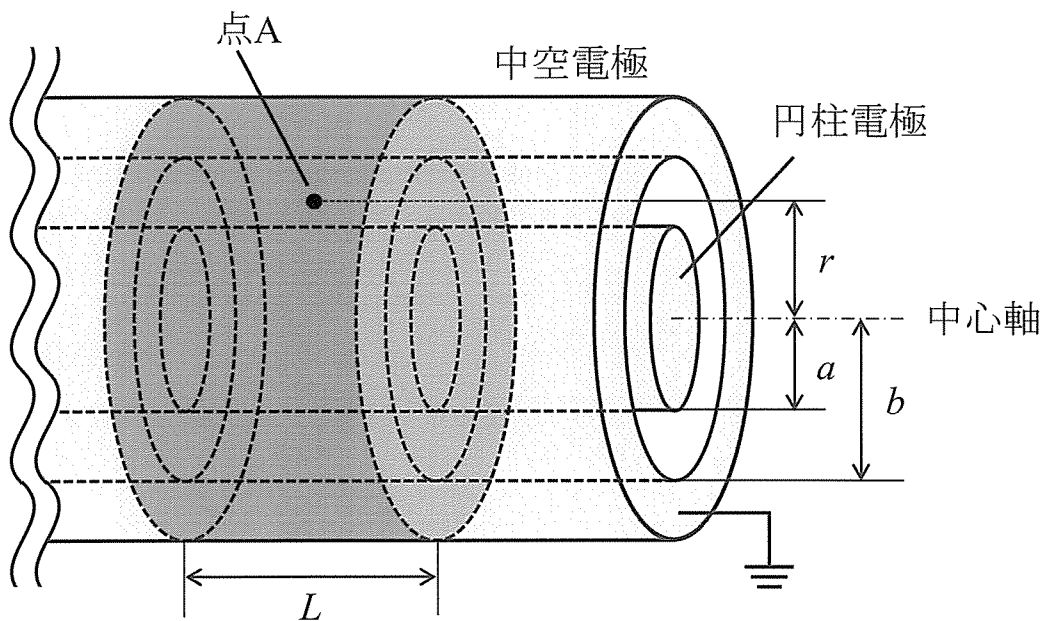


図 1

II 次の(1)～(7)の問いについて答えよ。

図2のように、 z 軸方向に一様な磁束密度 B が存在する空間に、1 辺の長さ h の正方形型のループ回路 ABCDA が設置されている。この回路は y 軸上の辺 AD を軸として抵抗や摩擦なく回転可能であり、時刻 t における xy 平面と回路面との角度を $\theta(t)$ とする。このループ回路には理想電流源が接続されており、図において反時計回りに流れる電流 J は一定に保たれている。辺 BC は質量 m の一様な細棒とし、他の辺は質量が無視できるとする。重力の影響、回路の太さ、回路の変形は無視できるとする。運動している回路に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) 回路面の角度 $\theta(t)$ に対して、磁場により辺 AB および BC に生じる力を求めよ。 x, y, z 方向の単位ベクトル e_x, e_y, e_z を用いてよい。
- (2) 時刻 t で回路に生じる誘導起電力の大きさを回路面の角度 $\theta(t)$ 、角速度 $\dot{\theta}(t)$ を用いて表せ。
(回路に誘導起電力が生じて、理想電流源により回路に流れる電流 J は一定に保たれる)
- (3) $\ddot{\theta}(t)$ を用いて、辺 BC の θ 方向の運動方程式を立てよ。
- (4) $\dot{\theta}(t)$ を用いて、辺 BC の運動エネルギーを表せ。
- (5) 辺 BC について、磁気力による(見かけの)位置エネルギーを求めよ。ただし、 $\theta(t) = \pi/2$ の時を 0 とする。

時刻 $t = 0$ で、角度 $\theta(0) = \theta_1$ の大きさが十分小さく、角速度 $\dot{\theta}(0) = 0$ とした場合を考える。

- (6) 回路面の角度 $\theta(t)$ を求めよ。ただし、 $\sin\theta(t) \cong \theta(t)$ を使ってよい。

次に、時刻 $t = 0$ で、 $\theta(0) = \theta_2$ ($0 < \theta_2 < \pi$)、 $\dot{\theta}(0) > 0$ とした場合の運動について考える。 $\dot{\theta}(0)$ の大きさに応じて、辺 BC は振動する場合と同一方向に回転し続ける場合がある。

- (7) 運動エネルギーと磁気力による(見かけの)位置エネルギーの和が一定となる保存則が成り立つことに注意して、辺 BC が同一方向に回転し続けるために $\dot{\theta}(0)$ が満たすべき条件を求めよ。

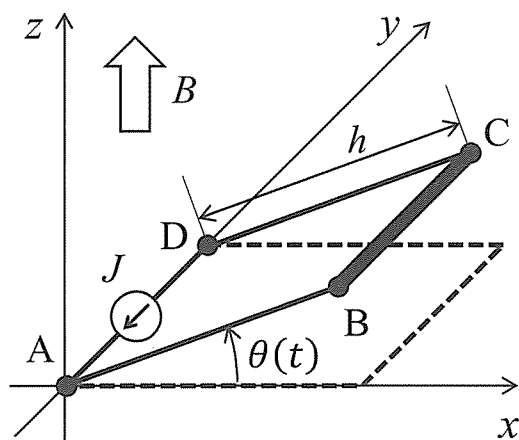


図 2

問題 15 統計物理学

設問すべてについて解答すること。

I 単一元素から成る固体の系が、温度は T 、体積は一定であり、計 I 個のエネルギー E_i の状態 $i = \{1, 2, \dots, I\}$ をとることができるとする。次の (1) ~ (6) の問いについて答えよ。なお、 E_i^n の熱統計平均は $\langle E^n \rangle$ とする (n は自然数)。また、 $\beta = 1/(k_B T)$ 、 k_B はボルツマン定数とする。

(1) 系の分配関数 Z を書け。

(2) 状態 i が実現される確率 p_i を、 Z を使って書け。さらに、 $\frac{dp_i}{dT}$ および $\sum_{i=1}^I \frac{dp_i}{dT}$ を計算せよ。

(3) 系のエントロピー S を、 p_i を使って書け。

(4) 系の定積熱容量 C_V を、 S を使って書け。

(5) 上記 (4) で解答した式を展開することで C_V を、 $\langle E^n \rangle$ を使って書け (n は自然数)。

(6) 以下では、 $I = 2$ 、 $(E_1, E_2) = (0, a)$ とする (定数 $a \geq 0$)。この系の C_V を求めよ。さらに、 T を一定 ($T > 0$) にした状況で、 a を 0 から無限大にまで変化させる場合、 C_V はどのように変化するか、その様子を説明せよ。

II スピン量子数 $\frac{1}{2}$ で質量 m の自由量子粒子から成る系が、温度ゼロで、密度 $n \equiv \frac{N}{V}$ (粒子数 N , 周期境界条件の体積 V) の状態にある。次の (1) ~ (4) の問いについて答えよ。なお、プランク定数を 2π で割った定数は $\hbar$ とする。

以下の (1) ~ (3) では、全ての粒子は同一種とする。

(1) 系のフェルミ波数 k_F とフェルミエネルギー e_F を、 n を用いて書け。

(2) 系の粒子 1 個当たりのエネルギー $\frac{E}{N}$ を、 n を用いて書け。

(3) 系の圧力 P を、 n を用いて書け。

以下の (4) では、スピン量子数 $\frac{1}{2}$ で質量 m の粒子は二種あり、各種の密度は $\frac{N}{2V}$ とせよ。

(4) 系の粒子 1 個当たりのエネルギー $\frac{E}{N}$ を、 $n \left(\equiv \frac{N}{V} \right)$ を用いて書け。

問題 16 量子物理学

設問すべてについて解答すること。プランク定数を 2π で割った定数を $\hbar$ とする。

I 質量 m の粒子が、次の 1 次元ポテンシャル中に束縛されている状態を考える。

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0, & \text{領域 I} \\ 0, & 0 < x < a, & \text{領域 II} \\ V_0, & x \geq a, & \text{領域 III} \end{cases}$$

このとき、エネルギー固有値 E に属する波動関数 $\psi(x)$ は、以下の時間に依存しないシュレーディンガー方程式を満たす。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

粒子は束縛状態にあり、 $0 < E < V_0$ を満たす。以下の (1) ~ (8) の問いに答えよ。

- (1) 領域 I における波動関数を示せ。
- (2) 領域 II, III におけるシュレーディンガー方程式を書き、以下の定数 k, κ を用いて一般解を求めよ。シュレーディンガー方程式の一般解は、線形独立な 2 つの解の線形結合で表される。線形結合で表す際の係数は、適宜定義して用いよ。

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

- (3) $x = 0$ における接続条件を用いて、領域 II における、上問 (2) で定義した係数が満たすべき条件式を書け。
- (4) $x \rightarrow \infty$ での境界条件を用いて、領域 III における、上問 (2) で定義した係数が満たすべき条件式を書け。
- (5) 上問 (3), (4) の条件および $x = a$ における接続条件から、固有状態が満たすべき条件式は以下の形で表される。

$$\boxed{} = \kappa$$

$\boxed{}$ に入る式を、 k, a を用いて表わせ。

- (6) 束縛状態では、 $x \geq a$ において波動関数は指数関数的に減衰する。

$$|\psi(a+L)| = \frac{1}{e} |\psi(a)| \text{ となる特徴量 } L \text{ (しみ出し長) を、} \kappa \text{ を用いて表わせ。}$$

また、粒子のエネルギーが障壁高さ V_0 に近づくと、 L がどう変化するか述べよ。

- (7) $V_0 \rightarrow \infty$ の極限を考える。このときのエネルギー固有値をすべて求めよ。
- (8) 有限の障壁の高さ V_0 の場合の基底状態のエネルギーと、無限に高い障壁の極限 ($V_0 \rightarrow \infty$) で得られる基底状態のエネルギーはどちらが大きいを書き、その理由を簡潔に述べよ。

II 軌道角運動量について、以下の設問 (1) ~ (8) に答えよ。 $\hat{A}^\dagger$ は演算子 $\hat{A}$ のエルミート共役で、 $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ は演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ の交換子である。必要に応じて、任意の線形演算子 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ について、

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]\hat{D} + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}\hat{D} + \hat{C}\hat{A}[\hat{B}, \hat{D}] + \hat{C}[\hat{A}, \hat{D}]\hat{B} \end{aligned}$$

が成り立つことを用いて良い。

運動量演算子の x, y, z 成分 $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ を用いて、軌道角運動量演算子 $\hat{\mathbf{L}}$ の x, y, z 成分 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ は、それぞれ、次のように書くことができる。

$$\hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$$

(1) $\hat{L}_z^\dagger = \hat{L}_z$ であることを示せ。必要に応じて、 x, y, z や $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ がエルミート演算子であることを用いて良い。

(2) $[x, \hat{p}_x]$ を求めよ。

(3) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ を $\hat{L}_z$ で、 $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$ を $\hat{L}_x$ で、 $[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$ を $\hat{L}_y$ で表せ。ただし、そのうちの一つは導出過程も示すこと。

(4) $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ と $\hat{L}_z$ に同時固有関数が存在することを示せ。

$\hat{\mathbf{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有関数を $|\psi_{\Lambda, m}\rangle$ 、それぞれの固有値を $\hbar^2\Lambda$ と $\hbar m$ とする。

(5) $\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$ という関係式を用いて、 $m^2 \leq \Lambda$ が成立することを示せ。必要に応じて、任意の波動関数 $|\psi\rangle$ と任意のエルミート演算子 $\hat{A}$ に関して、 $\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle \geq 0$ が成り立つことを用いて良い。

(6) $\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$, $\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$ のとき、 $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_+]$, $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_-]$ を求めよ。

(7) $[\hat{L}_z, \hat{L}_+]$ を $\hat{L}_+$ で、 $[\hat{L}_z, \hat{L}_-]$ を $\hat{L}_-$ で表せ。

(8) (6) と (7) の結果を用いて、 $\hat{L}_+|\psi_{\Lambda, m}\rangle$ と $\hat{L}_-|\psi_{\Lambda, m}\rangle$ について、これらは0でない場合に $\hat{\mathbf{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有関数であることを示せ。また、 $\hat{L}_+|\psi_{\Lambda, m}\rangle$ と $\hat{L}_-|\psi_{\Lambda, m}\rangle$ のそれぞれについて、 $\hat{\mathbf{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ の固有値を求めよ。