

問題13 基礎物理数学

出題意図

- ベクトルの発散、勾配や面積分の計算方法を理解しているか
- ベルヌーイ型の常微分方程式の解法を理解しているか
- フーリエ変換とその性質を理解しているか

I (1) (1a) $2xy + 2yz + 2zx$

(1b) $(2y + 2z, 2x + 2z, 2x + 2y)$

(1c) $(2y, 4z, 4x)$

(1d) $(2z, 2x - 2z, -2x + 2y)$

(2) $(0, 4\pi/3, 0)$

II (1) $\frac{du}{dt} + u = \frac{1}{2}t$

(2) $u(t) = \frac{1}{2}(t - 1) + Ce^{-t}$

(3) $x(t) = \left[\frac{1}{2}(t - 1) + e^{-t} \right]^2$

問題13 基礎物理数学

Ⅲ <解答>

(1)

$x = at$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x/a} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(2)

$x = t - b$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - b)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = F(\omega)e^{-i\omega b}$$

(3)

$$F_1(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2$$

(4)

$$F_2(\omega) = e^{-3i\omega} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2$$

問題14 電磁気学

出題意図

- I 同心円状に並んだ電極を題材として、電場、電荷、電流が正しく計算できるかを問う。
- II 磁場中の回路を題材に、磁場と電流の相互作用により生じる運動が理解できているかを問う。

問題14 電磁気学

問題 1 4 - I

(1)

$$\sigma_{\text{内}} = \frac{Q}{2\pi aL}, \quad \sigma_{\text{外}} = -\frac{Q}{2\pi bL}$$

(2)

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \frac{1}{r} \quad \text{向き：中心軸から離れる向き}$$

(3)

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

(4)

$$E(r) = \rho \frac{I}{2\pi rL} \quad \text{向き：中心軸から離れる向き}$$

(5)

$$V = \frac{\rho I}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$$

(6)

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$$

問題 1 4 - II

(1)

$$\mathbf{F}_{AB} = -JhB\cos\theta(t)\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{F}_{BC} = JhB\mathbf{e}_x$$

(2)

$$\mathcal{E} = Bh^2\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$$

(3)

$$mh\ddot{\theta}(t) = -JhB\sin\theta(t)$$

(4)

$$T = \frac{1}{2}mh^2\dot{\theta}(t)^2$$

(5)

$$U = -Jh^2B\cos\theta(t)$$

(6)

$$\theta(t) = \theta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{JB}{m}}t\right)$$

(7)

$$\dot{\theta}(0) > \sqrt{\frac{2JB}{m}}(1 + \cos\theta_2)$$

問題15 統計物理学

出題意図

- I 統計物理学におけるカノニカル集団について、各状態の存在確率を理解しているか、エントロピーの熱力学での意味を理解しているか、存在確率を使った式としてエントロピーを書けるか、さらに、エントロピーの式を展開して定積熱容量を導けるかを確認している。
- II 半整数のスピン量子数を持つ量子粒子系はフェルミ統計に従うこと、温度ゼロでのフェルミ粒子系に対して粒子の最大エネルギーと最大波数、エネルギーと圧力との関係式を導けること、さらに2種のフェルミ粒子からなる場合についても確認している。

解答例

I

$$(1) \quad Z = \sum_{i=1}^I \exp(-\beta E_i) .$$

$$(2) \quad p_i = \frac{\exp(-\beta E_i)}{Z} . \quad \frac{dp_i}{dT} = \left(\frac{E_i \exp(-\beta E_i)}{Z} - \frac{\langle E \rangle \exp(-\beta E_i)}{Z} \right) \frac{1}{k_B T^2} . \quad \sum_{i=1}^I \frac{dp_i}{dT} = 0 .$$

$$(3) \quad S = -k_B \sum_{i=1}^I p_i \ln p_i .$$

$$(4) \quad C_V = T \frac{dS}{dT} .$$

$$(5) \quad C_V = T \frac{dS}{dT} = (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) \frac{1}{k_B T^2} .$$

$$(6) \quad C_V = \frac{a^2 \exp(-\beta a)}{(1 + \exp(-\beta a))^2} \cdot \frac{1}{k_B T^2} . \quad \text{この } C_V \text{ は, } a = 0 \text{ および } \infty \text{ でゼロであり, その間の } a \text{ では正值である. } a \text{ を } 0 \text{ から無限大にまで大きくする場合, } C_V \text{ はゼロから増大し, 再びゼロとなる.}$$

問題15 統計物理学

II

$$(1) \quad N = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk \text{ より, } k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} . \quad \text{また, } e_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} .$$

$$(2) \quad \frac{E}{N} = \frac{\frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} 4\pi k^2 dk}{\frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk} = \frac{\hbar^2 \int_0^{k_F} k^4 dk}{2m \int_0^{k_F} k^2 dk} = \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} .$$

$$(3) \quad N \text{ が一定では, 微少量の関係 } dV = Nd\left(\frac{V}{N}\right) = Nd(n^{-1}) \text{ が成り立つ.}$$

$$\text{よって, } P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_N = -\left(\frac{\partial \left(\frac{E}{N}\right)}{\partial (n^{-1})}\right)_N = n^2 \left(\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{E}{N}\right)\right)_N = \frac{\hbar^2}{5m} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3} .$$

$$(4) \quad \text{粒子は二種あり, 各種の密度は } \frac{N}{2V} \text{ なので, 各種のフェルミ波数は共に } k_F' = \left(3\pi^2 \left(\frac{n}{2}\right)\right)^{1/3} \text{ と}$$

なる. 従って,

$$\frac{E}{N} = \frac{\frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F'} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} 4\pi k^2 dk + \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F'} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} 4\pi k^2 dk}{\frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F'} 4\pi k^2 dk + \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F'} 4\pi k^2 dk} = \frac{\hbar^2 \int_0^{k_F'} k^4 dk}{2m \int_0^{k_F'} k^2 dk} = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(3\pi^2 \left(\frac{n}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}} .$$

$$\text{つまり, } \frac{E}{N} = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(3\pi^2 \left(\frac{n}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}} .$$

問題16 量子物理学

出題の意図

- I 1次元ポテンシャルの束縛状態における固有値条件の導出と量子力学的な物理理解の深さを問う。
II 軌道角運動量演算子を題材として、演算子の交換関係や固有値を正しく計算できるかを問う。

I 解答例

(1) $\psi(x) = 0$

(2) 領域 II $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

ここで、 A, B は線形結合の係数である。

領域 III $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$

$$\psi(x) = C e^{-\kappa x} + D e^{\kappa x}$$

ここで、 C, D は線形結合の係数である。

(3) $B = 0$

(4) $D = 0$

(5) $-k \cot ka = \kappa$

(6) $L = \frac{1}{\kappa}$

$$E \rightarrow V_0^- \text{ のとき } L = \frac{1}{\kappa} \rightarrow \infty$$

粒子のエネルギーが障壁高さに近づくほど、波動関数は障壁側へ大きくしみ出す。

(7) $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

- (8) 無限に高い障壁の極限で得られる基底状態のエネルギーは、有限障壁の場合より大きい。有限障壁では $x \geq a$ 側に波動関数が指数関数的にしみ出し、井戸内の波数は減少するため。

II

$$(1) \hat{L}_z^\dagger = (x\hat{p}_y)^\dagger - (y\hat{p}_x)^\dagger = \hat{p}_y^\dagger x^\dagger - \hat{p}_x^\dagger y^\dagger = \hat{p}_y x - \hat{p}_x y = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = \hat{L}_z$$

(2) 任意の波動関数 f に関して,

$$[x, \hat{p}_x]f = (x\hat{p}_x - \hat{p}_x x)f = x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)f - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)xf = -i\hbar x \frac{\partial f}{\partial x} + i\hbar \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x}\right) = i\hbar f$$

したがって, $[x, \hat{p}_x] = i\hbar$ 。

$$(3) [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = [y\hat{p}_z, z\hat{p}_x] - [y\hat{p}_z, x\hat{p}_z] - [z\hat{p}_y, z\hat{p}_x] + [z\hat{p}_y, x\hat{p}_z]$$

$$= y[\hat{p}_z, z]\hat{p}_x + x[z, \hat{p}_z]\hat{p}_y = -i\hbar y\hat{p}_x + i\hbar x\hat{p}_y = i\hbar \hat{L}_z$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$$

$$(4) [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = \hat{L}_x[\hat{L}_x, \hat{L}_z] + [\hat{L}_x, \hat{L}_z]\hat{L}_x + \hat{L}_y[\hat{L}_y, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y, \hat{L}_z]\hat{L}_y$$

$$= \hat{L}_x(-i\hbar \hat{L}_y) + (-i\hbar \hat{L}_y)\hat{L}_x + \hat{L}_y(i\hbar \hat{L}_x) + (i\hbar \hat{L}_x)\hat{L}_y = 0$$

$\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ が可換であるため, 同時固有関数が存在する。

(5) (1) と同様に, $\hat{L}_x$ と $\hat{L}_y$ もエルミート演算子である。

$$\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \text{ から, } \hbar^2 \Lambda - \hbar^2 m^2 = \langle \psi_{\Lambda m} | \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 | \psi_{\Lambda m} \rangle \geq 0$$

したがって, $m^2 \leq \Lambda$ 。

$$(6) (4) \text{ と同様に, } [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0. \text{ したがって, } [\hat{L}^2, \hat{L}_+] = [\hat{L}^2, \hat{L}_-] = 0$$

$$(7) [\hat{L}_z, \hat{L}_+] = \hat{L}_z(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) - (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)\hat{L}_z = (\hat{L}_z\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_z) - i(\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y)$$

$$= [\hat{L}_z, \hat{L}_x] - i[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_y + \hbar \hat{L}_x = \hbar \hat{L}_+$$

同様に, $[\hat{L}_z, \hat{L}_-] = -\hbar \hat{L}_-$ 。

$$(8) \hat{L}^2 \hat{L}_+ |\psi_{\Lambda, m}\rangle = \hat{L}_+ \hat{L}^2 |\psi_{\Lambda, m}\rangle = \hat{L}_+ \hbar^2 \Lambda |\psi_{\Lambda, m}\rangle = \hbar^2 \Lambda \hat{L}_+ |\psi_{\Lambda, m}\rangle$$

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ |\psi_{\Lambda, m}\rangle = (\hat{L}_+ \hat{L}_z + \hbar \hat{L}_+) |\psi_{\Lambda, m}\rangle = \hbar(m+1) \hat{L}_+ |\psi_{\Lambda, m}\rangle$$

したがって, $\hat{L}_+ |\psi_{\Lambda, m}\rangle$ は, $\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有関数であり, その固有値は, それぞれ $\hbar^2 \Lambda$ と $\hbar(m+1)$ である。

同様に, $\hat{L}^2 \hat{L}_- |\psi_{\Lambda, m}\rangle = \hbar^2 \Lambda \hat{L}_- |\psi_{\Lambda, m}\rangle$, $\hat{L}_z \hat{L}_- |\psi_{\Lambda, m}\rangle = \hbar(m-1) \hat{L}_- |\psi_{\Lambda, m}\rangle$ 。したがって, $\hat{L}_- |\psi_{\Lambda, m}\rangle$ は, $\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有関数であり, その固有値は, それぞれ $\hbar^2 \Lambda$ と $\hbar(m-1)$ である。