

問題24 計算機ソフトウェア

I

出題意図

- 計算機科学の世界で広く利用されるハッシュ法に関する基本的な用語を理解しているかを問う。
- ハッシュ法では、データの格納および探索に要する時間計算量は概ね定数時間ですむが、衝突が頻発すると定数時間内に収まらない場合がある点を理解しているかを問う。
- データ格納のアルゴリズムを読み解き、探索回数を計算できるかを問う。
- 与えられたアルゴリズムから、時間計算量を算出できるかを問う。
- 具体的な入力データ列に対して、与えられたアルゴリズムを机上実行できるかを問う。

解答例

(1) (A): ハッシュ表 または ハッシュテーブル

(B): ハッシュ値

(C): ハッシュ関数

(D): 衝突 または コリジョン

(E): オープンアドレス または 開番地

(2) (a): $O(n)$ (b): $O(n)$ (c) $O(n)$

(3) (i) (F): $x == A_1[f_1(x)]$ (G): $x == A_2[f_2(x)]$ (順不同)

(ii) (a): $O(\text{MaxLoop})$ または $O(\log_2 n)$ (b): $O(1)$ (c) $O(1)$

(iii) 7: (f) 13: (a) 24: (j)

II

出題意図

- ・ 正規言語と文脈自由言語の特性を定義に基づいて正確に理解しているかを問う。
- ・ 正規言語と文脈自由言語の関係を正しく理解しているかを問う。
- ・ 文脈自由文法からプッシュダウンオートマトンへの変換アルゴリズムを正しく理解しているかを問う。
- ・ 正規言語と文脈自由言語の繰り返し定理（ポンピング補題）を正しく理解しているかを問う。
- ・ チョムスキー標準形を正しく理解しており、文脈自由言語からチョムスキー標準形へ変換することができるかを問う。

解答例

(1)

(a) 正規言語である。

理由： L_1 は有限個の文字列からなる言語であり、有限オートマトンで受理できるため正規言語である。

別解： L_1 を受理する以下のような有限オートマトン、もしくは L_1 を生成する正規文法を示し、この有限オートマトンで受理（もしくは正規文法で生成）できるからとしても良い。

(b) 文脈自由言語である。

理由：正規言語は文脈自由言語に包含され、 L_1 は正規言語であるため。文脈自由言語である。

(2)

(a) 以下の通り。

$\varepsilon, Z_0/SZ_0$

$\varepsilon, S/aTb$

$\varepsilon, T/aTB$

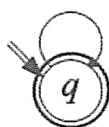
$\varepsilon, T/TB$

$\varepsilon, T/b$

$\varepsilon, B/b$

$a, a/\varepsilon$

$b, b/\varepsilon$



問題24 計算機ソフトウェア

(b) 正規言語ではない。

理由： $L(G_2)$ が正規言語であると仮定すると、 $L(G_2)$ は無限集合であるので、 $L(G_2)$ に対して正規言語の繰り返し定理（ポンピング補題）が成立する。定理の整数を n とし、 $L(G_2)$ に属する語 $z = a^n b^{n+1}$ を取ると、 $|z| = 2n + 1 \geq n$ であるから、定理の条件を満たすような z の分解 $z = uvw$ ($0 < |v| < n$)が存在する。

もし、 v が a と b を含んでいる、すなわち、 $v = a^i b^j$ ($i, j \neq 0$)であるとする、
 $uv^2w = a^{n-i}(a^i b^j)^2 b^{n+1-j} = a^n b^j a^i b^{n+1} \notin L(G_2)$ となるから、 $v = a^i b^j$ となることはない。

次に、もし v が a だけを含む、すなわち、 $v = a^i$ ($i \neq 0$)であるとする、 $uv^2w = a^{n-i}(a^i)^2 b^{n+1} = a^{n+i} b^{n+1} \notin L(G_2)$ となるから $i \geq 1$ で $v = a^i$ とならない。

同様に、もし v が b だけを含む、すなわち、 $v = b^j$ ($j \neq 0$)であるとする、 $uv^0w = a^n (b^j)^0 b^{n-j} = a^n b^{n-j} \notin L(G_2)$ となるから、 $j \geq 1$ で $v = b^j$ となることもない。

以上より、定理の条件を満たすような z の分解が存在しないため、 $L(G_2)$ は正規言語ではない。

(c) 文脈自由言語である。

理由： G_2 の書き換え規則 P は、すべて、左辺が非終端記号1つのみで、空語への書き換え規則もないので、 G_2 は文脈自由文法である。したがって、 G_2 から生成される言語 $L(G_2)$ は文脈自由言語である。

(d) チョムスキー標準形にすることができる。

理由： G_2 は文脈自由文法なので

$$S \rightarrow AX, X \rightarrow TC, T \rightarrow AY, T \rightarrow TB, T \rightarrow b, Y \rightarrow TB, B \rightarrow b, A \rightarrow a, C \rightarrow b$$

問題25 計算機ハードウェア

出題の意図

- I 基本となる数値表現を理解しているか、様々なパターンに対応できるかを確認する。
- II 基本となる論理式およびカルノー図を用いた論理式の簡単化を理解しているかを確認する。また、CMOS回路を理解しているかを確認する。

解答例

I

(1)

(a) $42_{(10)}$

(b) $5.375_{(10)}$

(2)

(a) 2進数 $1100\ 1111_{(2)}$, 8進数 $317_{(8)}$

(b) 2進数 $100\ 0100.101_{(2)}$, 8進数 $104.5_{(8)}$

(3)

(a) $C8A44C_{(16)}$

(b) $80CF42_{(16)}$

(4)

(a) $1000\ 0101_{(2)}$

(b) $1110\ 1010_{(2)}$

II

(1) $Z_0 = A_1 \cdot \overline{B_1}$

(2) $Z_0 = A_1 \cdot \overline{B_1} + A_1 \cdot B_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1}$

(3) $Z_0 : \boxtimes 1, Z_0 = A_1 \cdot \overline{B_1} + A_0 \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{B_0} + A_1 \cdot A_0 \cdot \overline{B_0}$

(4)

(a) NOR

(b) (iv)

問題25 計算機ハードウェア

$A_1A_0 \backslash B_1B_0$	00	01	11	10
00				
01	1			
11	1	1		1
10	1	1		

図 1: Z_0 のカルノー図

問題25 計算機ハードウェア

III

出題意図

キャッシュメモリおよび TLB の基本構造と動作原理を段階的に確認しつつ，両者を統合した定量的な性能評価（AMAT・実効 CPI）を通じて，メモリ階層とパイプラインの相互の影響を理解しているかを問う。

解答例

(1)

- (a) 5 ($32 = 2^5$)
- (b) 256 ($16\text{KB} \div (2 \times 32\text{B}) = 16384 \div 64 = 256$)
- (c) 8 ($256 = 2^8$)
- (d) 19 ($32 - 8 - 5 = 19$)

(2)

- (a) ページ番号：1 ($0x00001ABC$ の上位 20bit より)
オフセット：0xABC
- (b) (i) TLB ヒット，物理アドレス $0x00007ABC$
(ii) TLB ミス（ページ番号 0 は TLB にキャッシュされていないため；有効ビットは立っている）
(iii) ページフォルト（有効ビットが立っていない）

(3)

- (i) キャッシュミス，置き換えられるタグはない（空なので）
- (ii) キャッシュミス，置き換えられるタグはない（空いたところに配置される）
- (iii) キャッシュヒット
- (iv) キャッシュミス，B が置換（LRU により選択される）
- (v) キャッシュミス，A が置換（LRU により選択される）

(4)

- (a) $AMAT = 1 + (0.05 \times 10) + 1 + (0.03 \times 100) = 5.5$ サイクル
- (b) 実効 CPI = $1 + 0.30 \times (0.05 \times 10 + 0.03 \times 100) = 2.05$
- (c) TLB のみの場合： $1 + 0.30 \times (0.05 \times 10 + 1.0 \times 100) = 31.15$
キャッシュのみの場合： $1 + 0.30 \times (1.0 \times 10 + 0.03 \times 100) = 4.9$

(5)

- (a) $0.30 \times 0.00001 \times 10000000 = 30$
- (b) $2.05 + 30 = 32.05$
- (c) 改善 (i) : $CPI = 1 + 0.30 \times (0.01 \times 10 + 0.03 \times 100) + 30 = 31.93$
改善 (ii) : $CPI = 1 + 0.30 \times (0.05 \times 10 + 0.03 \times 100) + 0.30 \times 0.000001 \times 10000000 = 5.05$

I, II の出題意図

本問題は、情報理論および符号理論の基礎的事項に関する理解を問うものである。

I は、Z 通信路を題材として、条件付きエントロピーおよび相互情報量に関する基本概念の理解を問う。また、2 元エントロピー関数と微分を用いて通信路容量を求める計算過程を確認することで、通信路容量に関する理解を問う。II は、2 元体 $\mathbb{F}_2$ 上の $(7, 4, 3)$ ハミング符号を題材として、検査行列による符号の定義、符号語判定、最小距離と最小重みの関係、および検査行列の列の性質に基づく最小距離の論証について、定義に立ち返って導けるかを確認する。

I 解答例

(1) 出力分布は全確率公式より

$$\begin{aligned} P_Y(0) &= P_{Y|X}(0|0)P_X(0) + P_{Y|X}(0|1)P_X(1) \\ &= \frac{1}{2}q + 0 \cdot (1-q) = \frac{q}{2} \end{aligned}$$

であり、

$$P_Y(1) = 1 - P_Y(0) = 1 - \frac{q}{2}$$

である。

(2) 条件付きエントロピーは

$$H(Y | X) = P_X(0)H(Y | X = 0) + P_X(1)H(Y | X = 1)$$

と定義される。ここで、 $X = 0$ のとき

$$P_{Y|X}(0|0) = P_{Y|X}(1|0) = \frac{1}{2}$$

であるから

$$H(Y | X = 0) = 1$$

である。また、 $X = 1$ のときは $Y = 1$ が確率 1 で起こるので

$$H(Y | X = 1) = 0$$

である。よって

$$H(Y | X) = q \cdot 1 + (1-q) \cdot 0 = q$$

となる。

(3) Y は

$$P_Y(0) = \frac{q}{2}, \quad P_Y(1) = 1 - \frac{q}{2}$$

に従うから

$$H(Y) = h\left(\frac{q}{2}\right)$$

である。したがって相互情報量は

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y | X)$$

より $I(X; Y) = h\left(\frac{q}{2}\right) - q$ となる。

(4)

$$I(q) = h\left(\frac{q}{2}\right) - q$$

とおく。すると

$$I'(q) = \frac{1}{2}h'\left(\frac{q}{2}\right) - 1$$

であり、与えられたエントロピー関数の導関数:

$$h'(\theta) = \log_2 \frac{1-\theta}{\theta}$$

を用いると

$$I'(q) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1-q/2}{q/2} - 1$$

となる。停留点では $I'(q) = 0$ であるから

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{1-q/2}{q/2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{1-q/2}{q/2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-q/2}{q/2} = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{q}{2} = 2q$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{5}{2}q$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2}{5}$$

を得る。問題文にある「 $I(X; Y)$ が上に凸な関数である」という事実から、 $I(X; Y)$ を最大にするのは

$$q = \frac{2}{5}$$

である。

(5) 通信路容量 C は

$$C = \max_q I(X; Y) = I\left(\frac{2}{5}\right)$$

であるから

$$C = h\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{2}{5}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{5}\right) &= -\frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \log_2 \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} \log_2 5 + \frac{4}{5} (\log_2 5 - 2) = \log_2 5 - \frac{8}{5} \end{aligned}$$

であるので

$$C = \log_2 5 - \frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \log_2 5 - 2$$

となる。よって通信路容量は

$$C = \log_2 5 - 2$$

である。

II 解答例

(1) 検査行列 H は 3×7 行列であるから, C_{Hamming} の符号長は

$$n = 7$$

である。また, H の階数は 3 であるので, 符号の次元は

$$k = 7 - 3 = 4$$

である。したがって符号語の総数は

$$M = 2^k = 2^4 = 16$$

である。

(2) 符号語であるための必要十分条件は

$$Hv^T = \mathbf{0}$$

である。

まず

$$v_1 = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$$

について計算すると

$$Hv_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって v_1 は符号語である。

次に

$$v_2 = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

について計算すると

$$Hv_2^T = \begin{pmatrix} 1+1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは零ベクトルではないので, v_2 は符号語ではない。

したがって

v_1 は符号語であり, v_2 は符号語でない。

(3) 2元線形符号 C に対し,

$$d(x, y) = w(x + y)$$

である。ここで $x, y \in C$ ならば, 線形性より

$$x + y \in C$$

である。また $x \neq y$ ならば

$$x + y \neq 0$$

である。したがって

$$d(x, y) = w(x + y)$$

は C の零でない符号語の重みになっている。

逆に, 任意の $c \in C$ に対して

$$c = c + 0$$

であり, $0 \in C$ だから

$$w(c) = d(c, 0)$$

は 2つの符号語間の距離である。

問題26 情報数学

よって、符号語間距離の最小値は、零でない符号語の重みの最小値に等しい。すなわち

$$d_{\min} = \min_{\substack{c \in C \\ c \neq 0}} w(c).$$

したがって、 $\boxed{\mathbf{A}} = w(c)$, $\boxed{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ である。

(4) 重み 2 の符号語が存在すると仮定する。そのような符号語は

$$e_i + e_j \quad (i \neq j)$$

の形をしている。ここで、 e_i は単位行列 I_7 の第 i 行である。すると

$$H(e_i + e_j)^T$$

は H の第 i 列と第 j 列の和に等しい。

もしこれが符号語なら

$$H(e_i + e_j)^T = \mathbf{0}$$

であるから、第 i 列と第 j 列は等しいことになる。

しかし、この検査行列 H の各列は互いに異なる。したがってそのようなことは起こらない。よって重み 2 の符号語は存在しない。

したがって

C_{Hamming} には重み 2 の符号語は存在しない。

(5) (3),(4) と重み 1 の符号語が存在しない事実より、 C_{Hamming} の最小距離は

$$d_{\min} \geq 3$$

である。

これだけでは $d_{\min} = 3$ は結論できないので、重み 3 の符号語が実際に存在することを示す。たとえば

$$\mathbf{c} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$$

とすると

$$H\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題26 情報数学

よって $c \in C_{\text{Hamming}}$ であり,

$$w(c) = 3$$

である。したがって

$$d_{\min} \leq 3$$

である。

以上より

$$d_{\min} = 3$$

となる。

III

出題意図

- ・命題の基本と恒真（トートロジー）の意味を理解しているかを問う。
- ・正しい論理式を構成し記述できるかを問う。

解答例

- (1) $P(x, y) = (y \rightarrow x)$
 (2) $Q(x, y) = (x \vee \neg y)$

IV

出題意図

- ・頂点と有向辺から構成される有向グラフの基本を理解しているかを問う。
- ・関数における全射，単射，全単射を理解しているかを問う。
- ・順列，組合せの基本を理解しているかを問う。

解答例

- (1) 最大値 $n(n-1)$ ，最小値 0
 (2) 1
 (3) $C(2n-1, n)$ （異なる n 個の中から重複を許して n 個取り出す組合せの数）
 (4) $P(n, 2)$ （ n 個の中から2個取り出す順列の数）
 (5) G 上の任意の長さ k の閉路を $C = (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k) = f(v_1))$ ($2 \leq k \leq n$)とする。
 このとき， C に含まれる辺は $((v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k = v_1))$ であり，これらすべての辺の重みの和は以下の式で計算できる。

$$\text{重み} = \sum_{i=1}^{k-1} (f(v_i) - f(v_{i+1})) = (f(v_1) - f(v_2)) + (f(v_2) - f(v_3)) + \dots + (f(v_{k-1}) - f(v_k)) = f(v_1) - f(v_k) = 0.$$
 よって，常に成り立つ。

V

出題意図

- ・代数の基本や群における単位元，逆元を理解しているかを問う。
- ・剰余類，関数の合成を理解しているかを問う。

解答例

- (1) 単位元： $[0]$ ，逆元： $[x]$ の逆元は $[5-x]$
 (2) 単位元：恒等関数，逆元：逆関数

出題の意図と採点のポイント

I	● 2変数合成関数の偏導関数を求めることができるか。 ● 1変数関数の広義積分を求めることができるか。 ● 2変数関数の広義積分を求めることができるか。
II	● 行列式, 階数を求めることができるか。 ● 部分空間や基底を理解しているか。 ● 平行六面体の体積と行列式の関連を理解しているか。 ● 解空間を求めることができるか。

- 答 I (1) $\frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$
- (2) $\frac{\pi}{4}$
- (3) $\frac{7\pi^3}{192}$
- (4) $\frac{7\pi^3}{192} \log(\sqrt{2}+1)$
- II (1) $0, -1, -3$
- (2) $6t(t+1)(t+3)$
- (3) $t = -1$ のとき 1 ,
 $t = 0, -4$ のとき 2 ,
 $t \neq 0$ かつ $t \neq -1$ かつ $t \neq -4$ のとき 3
- (4) $t = 0$ または $t = -4$ のとき.
- $t = 0$ のとき $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$
- $t = -4$ のとき $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (注: 答の一例)

出題の意図と採点のポイント

I	● 複素関数のローラン級数を求めることができるか。 ● 留数定理を用いて複素積分を計算することができるか。
II	● フーリエ係数, フーリエ級数展開を決定することができるか。 ● フーリエ級数展開を無限級数の計算に応用することができるか。 ● パーセバルの等式を理解しているか。

- 答 I (1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n-4} - 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n-5}$
- (2) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$
- (3) $\operatorname{Res} \left[f(z), \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1+(1-2\sqrt{2})i}{4\sqrt{2}},$
 $\operatorname{Res} \left[f(z), \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right] = \frac{-1-(1+2\sqrt{2})i}{4\sqrt{2}},$
 $\operatorname{Res} \left[f(z), \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right] = \frac{-1+(1-2\sqrt{2})i}{4\sqrt{2}},$
 $\operatorname{Res} \left[f(z), \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1-(1+2\sqrt{2})i}{4\sqrt{2}}$
- (4) 0
- II (1) $a_0 = \pi, \quad a_n = \frac{2}{n^2\pi} \{(-1)^n - 1\} \quad (n \geq 1)$
- (2) $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx$
- (3) $\frac{\pi^2}{8}$
- (4) $\frac{\pi^4}{96}$

出題の意図と採点のポイント

I	● 作用・内積の定義を理解できるか。 ● 基底であることの判定法を理解しているか。 ● 正確に論証できるか。
II	● 作用素ノルムの定義を理解できるか。 ● 与えられた条件をみたす関数を構成できるか。 ● 正確に論証できるか。

- 答 I (1) 略
 (2) 略
 (3) $m!2^m$
 (4) 略
 (5) 略
- II (1) 略
 (2) 略
 (3) 略
 (4) 略