問題９　電気回路　出題意図・解答例

出題意図　　・節点電位法を用いて交流回路の方程式を解く。
・交流電圧源と交流電流源を含む回路の有効電力と無効電力を求める。

問題9 I（解答）

（１）　節点 A の電位 V_1 における節点方程式：

$$\frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1}{-jX_C} + \frac{V_1}{R_2 + jX_L} = 0$$

$$V_1 = \frac{15}{\left\{1.5 + j\left(\frac{1}{X_C} - 0.5\right)\right\}}$$

$$I_C = \frac{V_1}{-jX_C} = \frac{15}{(1 - 0.5X_C) - j1.5X_C}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_1}{R_2 + jX_L} = \frac{V_1}{1 + j} = \frac{15}{\left(2 - \frac{1}{X_C}\right) + j\left(\frac{1}{X_C} + 1\right)}$$

（２）　抵抗 R_2 で消費される電力：

$$P = R_2\left|I_{R_2}\right|^2 = \frac{15^2}{\left(2 - \frac{1}{X_C}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} + 1\right)^2}$$

$$X_C = 2\ \Omega$$

（３）　節点 V_1 と V_2 おける節点方程式：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 - j & -j \\ -j & 1 + j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - j6 \\ 1 - j4 \end{bmatrix} \mathrm{V}$$

$$V_1 = 5 - j6\ [V]$$

$$I_{R_2} = \frac{V_2}{R_2} = \frac{1 - j4}{R_2} = 1 - j4\ [\mathrm{A}]$$

（４）　各素子に流れる電流と電力：

有効電力：$P = 153$ [W],　　無効電力：$Q = 102$ [Var]　（符号は問わない）

Ⅱ　解答例

（1）

① 回路方程式$E = R_1\, i_L(t) + L\dfrac{d i_L(t)}{dt}$，　$E = R_2\, i_2(t) + \dfrac{1}{C}\int i_2(t)\,dt$

それぞれ，ラプラス変換する。

$\dfrac{50}{s} = 5 \cdot I_L(s) + 1 \cdot s I_L(s)$，　$\dfrac{50}{s} = 5 \cdot I_2(s) + \dfrac{I_2(s)}{0.02s}$

$I_L(s) = \dfrac{50}{s(s+5)} = 10\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+5}\right)$，　$I_2(s) = \dfrac{10}{s+10}$

逆ラプラス変換をする。$i_L(t) = 10\left(1 - \varepsilon^{-5t}\right)$，　$i_2(t) = 10\varepsilon^{-10t}$

したがって，$i_1(t) = i_L(t) + i_2(t) = 10\left(1 - \varepsilon^{-5t} + \varepsilon^{-10t}\right)$

② コンデンサの両端電圧は，

$v_C(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i_2(t)\,dt = \dfrac{1}{0.02}\int_0^t 10\varepsilon^{-10t}dt = -50\left[\varepsilon^{-10t}\right]_0^t = 50\left(1 - \varepsilon^{-10t}\right)$

③ 定常状態でコイルに流れる電流は，$I_L = \dfrac{E}{R_1} = \dfrac{50}{5} = 10\,\mathrm{A}$

したがって，消費電力は，$P = R_1 I_L{}^2 = 5 \cdot 10^2 = 500\,\mathrm{W}$

（2）

① 回路方程式$0 = R_2\, i_2(t) + \dfrac{1}{C}\int i_2(t)\,dt + L\dfrac{d i_2(t)}{dt} + R_1\, i_2(t)$

ラプラス変換する。

$0 = 5 \cdot I_2(s) + \dfrac{I_2(s)}{0.02s} + \dfrac{50}{s} + 1 \cdot \left\{s I_2(s) - (-10)\right\} + 5 \cdot I_2(s)$

$I_2(s) = \dfrac{-10(s+5)}{s^2 + 10s + 50} = \dfrac{-10(s+5)}{(s+5)^2 + 5^2}$

逆ラプラス変換をする。$i_2(t) = -10\,\varepsilon^{-5t}\cos(5t)$

② 回路の消費電力量

$W = \int_0^\infty (R_1 + R_2)(i_2(t))^2\,dt = \int_0^\infty 5 \cdot 10^2 \varepsilon^{-5t}\cos^2(5t)\,dt = 500\int_0^\infty \varepsilon^{-4t}\left(\dfrac{2\cos(10t)+1}{2}\right)dt = 75\,\mathrm{J}$

(スイッチを開く前にコイルとコンデンサに蓄えられているエネルギーに等しくなるので，

$W = \dfrac{1}{2}L \cdot I_L{}^2 + \dfrac{1}{2}C \cdot V_C{}^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 + \dfrac{1}{2} \cdot 0.02 \cdot 50^2 = 50 + 25 = 75\,\mathrm{J}$)

③ コイル側の回路とコンデンサ側の回路の時定数が等しくなればよいので，$\dfrac{L}{R_1} = CR_2$

したがって，$C = L\dfrac{1}{R_1 \cdot R_2} = 0.04\,\mathrm{F}$

問題10　電磁気学　出題意図・解答例

I

（1）電極板間隔が $d-t$ になったのと等価なので，（2つのコンデンサの直列接続として計算しても良い）

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t}$$

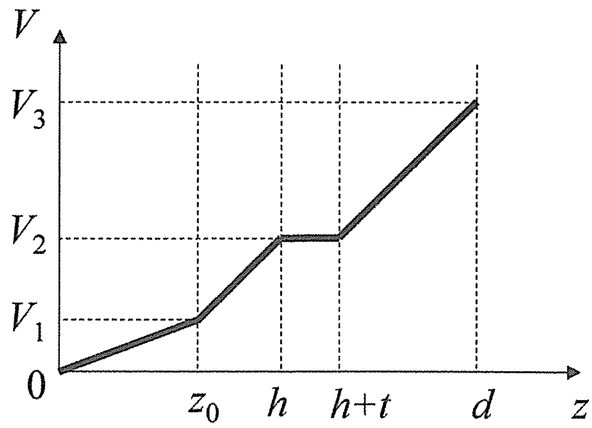
$$Q_0 = C_0 V_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t} V_0$$

（2）電極板に蓄積されている電荷量が Q_0 から変化しないため，ガウスの定理より，

$$E_1 = \frac{V_0}{\varepsilon_r (d-t)}$$

$$E_2 = \frac{V_0}{d-t}$$

$$E_3 = \frac{V_0}{d-t}$$



（3）電位は，電界×距離なので，（2）の電界を用いて，
図の V_1, V_2, V_3 は以下のとおり。

$$V_1 = \frac{V_0}{\varepsilon_r}\frac{z_0}{d-t}$$

$$V_2 = \frac{V_0}{\varepsilon_r}\frac{z_0}{d-t} + V_0\frac{h-z_0}{d-t}$$

$$V_3 = \frac{V_0}{\varepsilon_r}\frac{z_0}{d-t} + V_0\frac{h-z_0}{d-t} + V_0\frac{d-t-h}{d-t} = \frac{V_0}{\varepsilon_r}\frac{z_0}{d-t} + V_0\frac{d-t-z_0}{d-t} = \frac{V_0}{d-t}\left(\frac{z_0}{\varepsilon_r} + d - t - z_0\right)$$

$$= \frac{V_0}{d-t}\left\{d - t - z_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\right\}$$

（4）電極板に蓄積されている電荷量が Q_0 から変化せず，電極板間の電位差は上記の V_3 なので，

$$C_1(z_0) = \frac{Q_0}{V_3} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t}V_0 \cdot \frac{d-t}{V_0}\frac{1}{d-t-z_0\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t-z_0\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

$$W_1(z_0) = \frac{Q_0^2}{2C_1(z_0)} = \frac{d-t-z_0\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)}{2\varepsilon_0 A}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d-t}V_0\right)^2 = \frac{d-t-z_0\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)}{2(d-t)^2}\varepsilon_0 A V_0^2$$

（5）２つの状態で，静電容量が C_0 と同じである一方，蓄積されている電荷量の方が Q_2，Q_0 と異なるため，以下のように表される。

$$\frac{W_2}{W_0} = \frac{\frac{Q_2^2}{2C_0}}{\frac{Q_0^2}{2C_0}} = \frac{Q_2^2}{Q_0^2} = \left(\frac{C_1(h)V_0}{C_0V_0}\right)^2 = \left(\frac{C_1(h)}{C_0}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d-t-h\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)}}{\frac{\varepsilon_0 A}{d-t}}\right)^2 = \left(\frac{d-t}{d-t-h\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{1-\frac{h}{d-t}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)}\right)^2$$

出題の意図と採点のポイント

(1)	・電流素片が作る微小磁界の法則を理解しているか。
(2)	・空間座標を用いて微小磁界を計算することができるか。
(3)	・コイル全体の作る磁界を積分により計算することができるか。
(4)	・コイルに鎖交する磁束を理解しているか。
(5)	・コイルに鎖交する磁束の時間変化と誘導起電力との関係を理解しているか。

II （1） $d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I a d\theta \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$

（2） $dB_z = \frac{\mu_0 I a d\theta}{4\pi R^3}(a - x'\cos\theta - y'\sin\theta)$

（3） $B_z = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3}\left\{2\pi a - \frac{3\pi a}{r^2}\left(x'^2 + y'^2\right)\right\}$

又は $\frac{\mu_0 I a}{4\pi}\frac{2\pi a}{r^3}\left\{1 - \frac{3}{2r^2}\left(x'^2 + y'^2\right)\right\}$,　$\frac{\mu_0 I\pi a^2}{4\pi r^5}(3z'^2 - r^2)$　でもよい。

（4） $\Phi = \frac{\mu_0 I\pi a^2}{2}\frac{b^2}{(b^2+c^2)^{3/2}}$

（5） $V = \frac{\mu_0 I\pi a^2}{2}\frac{3b^2 cv}{(b^2+c^2)^{5/2}}$