**2026年度（令和8年度）大学院工学研究科（博士前期課程）**

**私費外国人留学生**

**専門試験問題**

**情報工学系**

**（ネットワークプログラム、知能情報プログラム、メディア情報プログラム、情報数理プログラム）**

## 注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は，１ページから１６ページまであります。解答用紙は，６枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。
3. 下記表の問題番号 1，13 から 17 の中から２題を解答してください。<u>１題につき解答用紙１枚を使用して</u>解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

| 問題番号 | 出題科目 |
|---|---|
| 1 | 微分積分・線形代数<br>Calculus and linear algebra |
| 13 | 計算機ソフトウェア<br>Computer software |
| 14 | 計算機ハードウェア<br>Computer hardware |
| 15 | 情報数学<br>Mathematics for computer science |
| 16 | 数理科学１<br>Mathematics 1 |
| 17 | 数理科学２<br>Mathematics 2 |

4. 監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム及び受験番号を２枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。
5. 計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。
6. 解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。
7. 机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。
8. コンパス及び定規等は，使用できません。
9. 時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。
10. スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。
11. 試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。
12. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

**問題１　微分積分・線形代数**　設問すべてについて解答すること。

**Ⅰ** 2 変数関数 $f$ を

$$f(x,y)=y(2x-y)^2+3y^3-4y$$

とおく。このとき，次の (1) ～ (3) の問いに答えよ。

(1) 関数 $f$ の停留点を求めよ。

(2) 関数 $f$ の極値とそのときの $(x,y)$ を求めよ。

(3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D$ を

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\leq 2x-y\leq 2,\ 0\leq y\leq 1\}$$

で定める。$D$ における関数 $f$ の最大値と最小値を求めよ。

**Ⅱ** 3 次正方行列 $A$ を $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で定める。このとき，次の (1) ～ (5) の問いに答えよ。

(1) $A$ の固有値を求めよ。

(2) $f$ の核 $\mathrm{Ker}(f)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ の基底を与えよ。

(3) $\mathrm{Ker}(f)$ の直交補空間 $\mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ の基底を与えよ。

(4) $A$ を対角化する直交行列 $P$ を与えよ。

(5) $n$ を正の整数とする。$A^n$ を求めよ。

問題 13　計算機ソフトウェア　設問についてすべて解答すること。

I.　次の(1)から(2)の問いについて答えよ。

辺に重みがないグラフ構造のうち、ノード間に親子関係があり、親ノードは 1 つか 2 つの子ノードしか持たない二分木を考える。図 1 は各ノードの要素に整数値を持つ二分木の例である。二分木に含まれるノードをある規則によって訪問し、各ノードの要素を書き出すことを考える。図 2 は二分木の指定されたノードを起点としてその部分木に含まれるすべてのノードを訪問する 2 種類のアルゴリズムである。ここで n は二分木のあるノード番号を表し、配列 left[n]はノード n の左の子ノード番号、配列 right[n]は右の子ノード番号を表し、該当ノードが子ノードを持たない場合は NULL で表されている。配列 element[n]はノード n が持つ要素を表している。また、queue.push()・queue.pop()・queue.size()はキューに対する挿入・取り出しと返却・キューに含まれる要素数の返却、print()は指定された文字列を書き出す操作にそれぞれ対応し、キューの初期状態は要素を含まない空の状態とする。

(1) 図 1 の二分木の走査に関する以下の問いに答えよ。

(a) 二分木に含まれるノードを訪問するアルゴリズムには主に幅優先探索と深さ優先探索の 2 種類がある。図 2 に示された 2 つのアルゴリズムはそれぞれどちらに該当するか答えよ。

(b) 図 1 で表される二分木に対し、図 2 の 2 種類のアルゴリズムによって各ノードの要素を書き出した場合、出力される文字列をそれぞれ答えよ。

(c) 図 2 の TreeTraverseB において、ノードの要素の値が昇順に書き出されるようにアルゴリズムを修正せよ。解答は図の疑似コードに準じて作成せよ。

(d) 図 2 の TreeTraverseB と同等のアルゴリズムは、スタックを用いて非再帰的に記述することができる。問(c)の解答と同等の処理を非再帰的に記述するように図 3 のアルゴリズム TreeTraverseC()の空欄(ア)～(オ)を答えよ。データ構造として stack を利用してよい。その際、データ x を stack に挿入する操作を stack.push(x)、stack からデータを取り出し返却する操作を stack.pop()、stack に含まれる要素数を返却する操作を stack.size()とし、stack の初期状態は要素を含まない空の状態とする。なお、それぞれの空欄は 1 つの式に対応し該当箇所の式が不要の場合は「無し」と回答せよ。

二分木は探索問題に応用することができ、各ノードが下記の条件を満たすように作られたものを二分探索木とよぶ。図 1 の二分木はその条件を満たす二分探索木の一例である。

条件：左の子ノードを頂点とする部分木の各要素の値 ≦ 自ノードの要素の値 ≦ 右の子ノードを頂点とする部分木の各要素の値

(2) ノードの総数が $N$(ただし $N$ は $2^k-1$ とする)である二分探索木に関する以下の問に答えよ。

(a) 二分探索木の性質を利用し二分探索木の指定されたノードから目的の要素を効率的に探索できるように図 4 のアルゴリズム SearchElement()の空欄(カ)～(ク)を答えよ。

(b) 問(a)のアルゴリズムにおいて、目的の要素を探索する際に必要な時間計算量は木の構造によって異なる。最良と最悪の場合とは一般的にどのような構造かそれぞれ簡潔に答えよ。

(c) 問(b)の最良の場合と最悪の場合について、二分探索木で目的の要素を探索する際に必要な最悪の時間計算量をそれぞれ Big-Θ表記で答えよ。

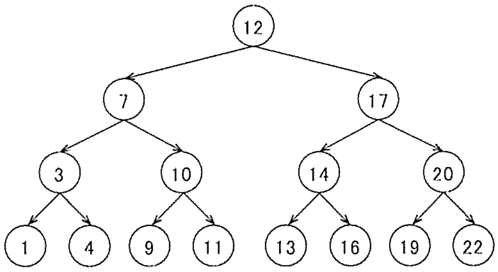



図1　各ノードの要素に整数値を持つ二分木

```
TreeTraverseA( n )
    queue.push(n)
    while( queue.size() > 0)
        p = queue.pop()
        print( element[p] + ″ ″)
        if( left[p] != NULL )
            queue.push( left[p] )
        if( right[p] != NULL )
            queue.push( right[p] )
```

```
TreeTraverseB( n )
    if( n != NULL )
        print( element[n] + ″ ″)
        TreeTraverseB( left[n] )
        TreeTraverseB( right[n] )
```

図2　二分木を走査し各ノードの要素の書き出しを行う2種類のアルゴリズム

```
TreeTraverseC( n )
    p = n
    while()
        while( p != NULL )
            【　（ア）　】
            【　（イ）　】
        if( 【　（ウ）　】 == 0 )
            break
        【　（エ）　】
        print( element[p] + ″ ″)
        p = right[ 【　（オ）　】 ]
```

図3　問(1)-(c)と同等の処理を非再帰的に記述したアルゴリズム

```
SearchElement(n, key)
    if( 【　（カ）　】 )
        return n
    if( 【　（キ）　】 )
        return SearchElement(left[n], key)
    else
        return 【　（ク）　】
```

図4　指定された要素を持つノードを探索し該当するノード番号を返却するアルゴリズム

II　次の（１）と（２）の問いについて答えよ。

（１）　アルファベット $\Sigma = \{a\}$ 上の言語に関する以下の問い(a)～(c)に答えよ。

(a)　言語 $L_1 = \{a^{2n} | n$は１以上の整数$\}$ を受理する決定性有限オートマトンを構成し状態遷移図を描け。ただし，受理状態は１つとすること。

(b)　状態数が$k$の決定性有限オートマトン$M_1$とその状態遷移図（有向グラフ）$D_1$について，$M_1$が長さが$k$より長い語を含む言語を受理（識別）可能であるとき，$D_1$には必ず有向閉路が存在することを示せ。

(c)　言語 $L_2 = \{a^{n^2} | n$は１以上の整数$\}$ を受理する決定性有限オートマトンが存在しないことを示せ。

（２）　以下の２つの文法 $G_1, G_2$ に関する以下の問い(a)～(d)に答えよ。

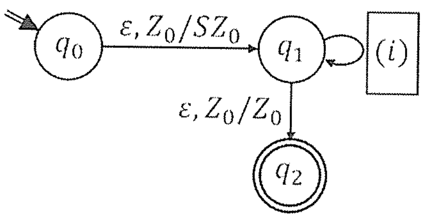
$G_1 =< N_1, \Sigma, P_1, S >$

ただし $N_1 = \{S, E\}, \Sigma = \{a, +, \times\}, P_1 = \{S \to E, E \to E + E, E \to E \times E, E \to a\}$

$G_2 =< N_2, \Sigma, P_2, S >$

ただし $N_2 = \{S, E, T\}, \Sigma = \{a, +, \times\}, P_2 = \{S \to E, E \to E + T, E \to T, T \to T \times E, T \to a\}$

(a)　文法$G_1$が生成する言語を受理する３状態の非決定性プッシュダウンオートマトンを構成したい。右の状態遷移図の空欄$(i)$に入るべき適切な答えを書け。ただし，答えは他の矢印に付けられたものと同じ形式で書くこと。また，図中のプッシュダウン記号（スタック記号）を$\Gamma = \{Z_0\} \cup N_1 \cup \Sigma$（$Z_0$はボトム記号（ボトムマーカ））とし，状態$q_2$のみを受理状態とする。




(b)　文法 $G_2$ をチョムスキー標準形に変換した文法を $G'_2 =< N'_2, \Sigma_2, P'_2, S >$とする。以下の空欄$(ii)$に入るべき適切な答えを書け。

$$N'_2 = \{S, E, T, A_1, A_2, B_1, B_2\}, P'_2 = \{A_2 \to +, B_2 \to \times, \boxed{\quad (ii) \quad} \}$$

(c)　語 $a + a \times a$ を文法 $G_1$および$G_2$ で生成するときの導出木（構文解析木，構文木）を描け。もし導出木が複数ある場合はすべて列挙すること。

(d)　ある文法 $G$ においてある語 $w$ に対する導出木が複数存在する場合，$w$ をあいまいな語と呼ぶ。$G_2$が生成する語がすべてあいまいな場合は解答用紙の「全部(all)」を丸で囲み，$a + a \times a$ 以外の長さ５のあいまいな語を１つ示せ。または，$G_2$ があいまいでない語を生成可能な場合は「一部(part)」を丸で囲み，$a + a \times a$ 以外の長さ５のあいまいでない語を１つ示せ。

**問題 14　計算機ハードウエア**　設問についてすべて解答すること。

I　数値表現に関する以下の問い（1）〜（4）に答えよ。ただし，括弧付きで示した添え字の数字は基数を表す。

（1）次の 8 ビットの 2 の補数表現で与えられた 2 進数を 10 進数に変換せよ。

(a) $10010110_{(2)}$

(b) $01101100_{(2)}$

（2）2 の補数で表現された $11110000_{(2)}$ を算術右シフト 2 回したときの結果を 10 進数に変換せよ。

（3）10 進小数である 0.624 を誤差 $\pm 0.001$ 以内で表現できる 2 進小数に変換せよ。

（4）$2025_{(r)} = 1045_{(10)}$ が成立する基数 $r$ を求めよ。

II　ディジタル回路に関する以下の問い（1）〜（4）に答えよ。

2 つの入力 $a, b \in \{0,1\}$ の半加算器（HA）の出力は，和 $s = a \oplus b$ および桁上がり $c = a \cdot b$ である。「$\cdot$」は AND 演算,「$+$」は OR 演算,「$\oplus$」は XOR 演算を意味する。なお，論理回路を図示する回答には，図 2-1 に示す MIL 記号を用いよ。


図 2-1: MIL 記号

（1）3 入力 $a, b, c_{\mathrm{in}} \in \{0,1\}$ が入力される全加算器（FA）を半加算器を用いて設計したい。

(a) 全加算器の和 $s$ およびキャリー $c_{\mathrm{out}}$ について真理値表を作成せよ。

(b) 全加算器の出力である和 $s$ およびキャリー $c_{\mathrm{out}}$ を論理式で表せ。

(c) 全加算器を，図 2-2 の半加算器と MIL 記号を用いて図示せよ。

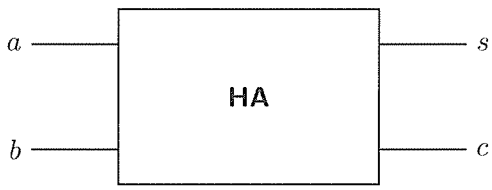



図 2-2: 半加算器

（2）3 入力 $a, b, c \in \{0,1\}$ と 2 つの制御信号 $s_0, s_1 \in \{0,1\}$ に対して，$s_0, s_1$ の状態に応じて出力を切り替える回路を設計したい。$s_0, s_1$ ともに 0 の時は，$a, b$ の論理和 $a + b$ を出力し，$s_0$ が 0 かつ $s_1$ が 1 の時は，$a, b$ の排他的論理和を出力し，$s_0$ が 1 の時は，3 入力 $a, b, c$ の論理積を出力する $f(a, b, c, s_0, s_1)$ の論理式を示せ。

（3）3 ビット符号なし整数 $A = a_2a_1a_0$, $B = b_2b_1b_0$, $a_i, b_i \in \{0,1\}$ の和 $A+B$ をリップルキャリー加算器（Ripple Carry Adder; RCA）で計算したい。RCA とは，各ビットの全加算器を直列に接続し，前のビットのキャリー出力を次のビットのキャリー入力として逐次伝搬させる構成の加算器である。各全加算器は，2 つの入力ビット $a_i, b_i$，および前段からのキャリー入力 $c_i$ を受け取り，出力として和 $s_i$ と次段へのキャリー出力 $c_{i+1}$ を生成する。なお，最下位ビットの初期キャリー入力 $c_0$ は 0 とする。

(a) 3 ビット RCA 全体の接続構成を示す論理回路図を示せ。なお，図 2-3 の全加算器を用いよ。

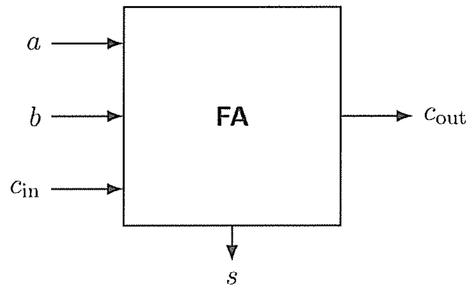



図 2-3: 全加算器（入力信号 $a, b$，キャリー入力 $c_{\mathrm{in}}$，和 $s$，キャリー出力 $c_{\mathrm{out}}$）

(b) $n$ ビット RCA に拡張した場合を考える。加算結果が得られる遅延は 1 ビット RCA の何倍となるか答えよ。

（4）キャリールックアヘッド加算器（Carry Lookahead Adder; CLA）の導出と設計をしたい。CLA とは，(3) の RCA とは異なり各ビットで発生するキャリー信号を前方に伝播させる代わりに，論理的に一括で求めることで加算の高速化を図る回路である。ここでは，4 ビット符号なし整数 $A = a_3a_2a_1a_0$, $B = b_3b_2b_1b_0$, $a_i, b_i \in \{0,1\}$ の和 $A+B$ を考える。

(a) （1）で導出した全加算器において，伝播信号 $p$，生成信号 $g$ を下記で定義する。

$$p = a \oplus b, \quad g = a \cdot b$$

各ビット $i \in \{0,1,2,3\}$ に対して，伝播 $p_i = a_i \oplus b_i$，生成 $g_i = a_i \cdot b_i$ とする。また，最下位桁キャリー入力を $c_0$ とする。そのとき，キャリー $c_1, c_2, c_3, c_4$ を $c_0, p_0, p_1, p_2, p_3, g_0, g_1, g_2, g_3$ のみを用いる論理式として導出せよ。

(b) CLA の遅延のボトルネックについて簡潔に論述せよ。

(c) CLA の利点，欠点に関してそれぞれ簡潔に論述せよ。

III　以下の問い（1）～（2）に答えよ。

（1）記憶装置の階層化について以下の問いにすべて答えよ

今，記憶階層として，プロセッサ，補助記憶装置，L2 キャッシュ，L1 キャッシュ，主記憶の 5 つがあるとする (記述順は階層順とは一致しない)。

(a) L1 キャッシュには，どの記憶階層のデータがキャッシュされているか？上記の 5 つの中から最も適切なものを一つ選べ。

(b) L2 キャッシュには，どの記憶階層のデータがキャッシュされているか？上記の 5 つの中から最も適切なものを一つ選べ。

(c) 主記憶には，どの記憶階層のデータがキャッシュされているか？上記の 5 つの中から最も適切なものを一つ選べ。

(d) L1 キャッシュと L2 キャッシュにはどのような特性の違いが与えられるか？「キャッシュのアクセス時間」,「ミス率」という言葉を用いて説明せよ。

（2）仮想記憶とページングについて以下の問いにすべて答えよ。

(a) プログラムが主記憶上に領域を確保する場合に，フラグメンテーション (断片化) という問題が発生する場合がある。このフラグメンテーションとはどのような問題なのかを述べよ。

(b) フラグメンテーションの解決方法としてページングの利用が挙げられる。ページングの原理を説明し，なぜページングによってフラグメンテーションが解決するのかを述べよ。

(c) ページングを応用することで，実メモリよりも広いメモリ空間をユーザーに提供する，仮想記憶を実現することができる。仮想記憶の実現方法を,「補助記憶装置」「ページ・テーブル」という単語を用いて説明せよ。

**問題 15　情報数学**　設問すべてについて解答すること。

I　二つの独立な確率変数 $S=i,\ i\in\{0,1,2\}$, $T=j,\ j\in\{0,1,2,3\}$ を考える。

以下のように生起確率が与えられるとする。

$$P(S=0)=\frac{1}{4},\ \ P(S=1)=\frac{1}{2},\ \ P(T=0)=\frac{1}{4},\ \ P(T=1)=\frac{1}{4},\ \ P(T=2)=\frac{1}{4}$$

そして，次の算術演算により得られる確率変数 $X, Y$ を考える。

$$\begin{aligned} X &= (S+T) \mod 3 \\ Y &= (S\times T) \mod 3 \end{aligned}$$

ここで　mod は剰余演算子である。次の（1）～（7）の問いに答えよ。解答においては，導出過程も簡潔に示すこと。また，最も簡約化した形で答えを示すこと。ここで簡約化とは，分数に関しては既約形，対数に関しては最も簡単な形（例：$\log_2 6 \to 1+\log_2 3$）に変形することを指す。$0\log_2 0=0$ とする。

（1）エントロピー $H(S)$ を求めよ。

（2）確率 $P(X)$ を求めよ。

（3）確率 $P(Y)$ を求めよ。

（4）エントロピー $H(Y)$ を求めよ。

（5）条件付き確率 $P(Y|X)$ を求めよ。

（6）条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を求めよ。

（7）相互情報量 $I(X;Y)$ を求めよ。

Ⅱ　集合$A = \{1,2,3\}$および$B = \{2,3,4,5\}$に対して次の（１）～（３）の問いについて答えよ。各設問では集合$Z$に関するべき集合を$2^Z$のように書く。

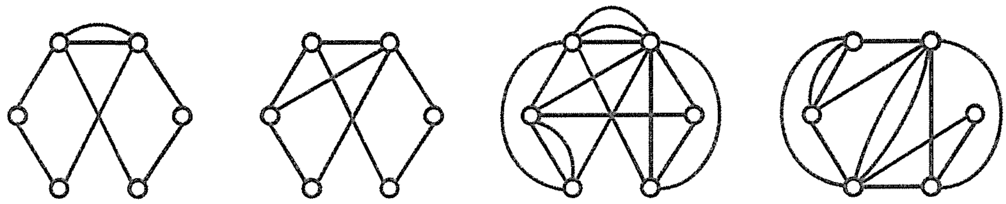
（１）　$A$に関するべき集合$2^A$の要素をすべて列挙せよ。

（２）　$B$に関するべき集合$2^B$の要素数$|2^B|$を求めよ。導出過程も簡潔に示すこと。

（３）　$|2^A \cup 2^B|$を求めよ。導出過程も簡潔に示すこと。

Ⅲ　次の（１），（２）の問いについて答えよ。

（１）　以下の図に示すグラフ$a, b, c, d$の中でオイラー閉路を持つものをすべて答えよ。また，その理由も説明せよ。



グラフ$a$　　グラフ$b$　　グラフ$c$　　グラフ$d$

（２）　頂点の集合$V$=$\{1,2, \ldots, 10\}$からなり，以下の式で辺が定義される３つのグラフ$G_1$，$G_2$，$G_3$についてそれぞれの総次数を求めよ。導出過程も簡潔に示すこと。

$G_1(V,E_1), E_1$=$\{\ \{x, y\} \mid x + y$が偶数$,\ x, y \in V\ \}$

$G_2(V,E_2), E_2$=$\{\ \{x, y\} \mid x + y$が奇数$,\ x, y \in V\ \}$

$G_3(V,E_3), E_3$=$\{\ \{x, y\} \mid xy$が３の倍数$,\ x, y \in V\ \}$

Ⅳ　あるパラメータ$a, b \in \mathbb{R}$に関して写像$h{:}\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，$g{:}\, \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$が

$$h(x) = \begin{bmatrix} \max(a - x, 0) \\ \max(a + x, 0) \end{bmatrix}, g(y_1, y_2) = by_1 + y_2$$

のように定義されているとき，次の（１）～（３）の問いについて答えよ。（２），（３）の解答については導出過程も簡潔に示すこと。導出過程として図を用いても良い。

（１）　$y_1 = \max(a - x, 0)$および$y_2 = \max(a + x, 0)$のそれぞれについて関数の形状を図示せよ。

（２）　写像$h$が単射となるための$a$の条件を答えよ。

（３）　合成写像$g \circ h$が全単射となるための$a$および$b$の条件を答えよ。

**問題 16　数理科学 1**　設問すべてについて解答すること。

**I** 複素関数 $f$ を

$$f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{z^3}$$

とおく。このとき，次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) $z = 0$ を中心とする $f(z)$ のローラン級数を求めよ。

(2) 閉曲線 $C_1\colon z = e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ に対して複素積分 $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz$ の値を求めよ。

(3) $e^z + e^{-z} = 0$ をみたす複素数 $z$ をすべて求めよ。

(4) 閉曲線 $C_2\colon z = 2e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ に対して複素積分 $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{f(z)}\,dz$ の値を求めよ。

**II** 2 階定数係数常微分方程式に関する次の (1) ～ (5) の問いに答えよ。ただし, 未知関数を

$$y : \mathbb{R} \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$$

とし，$y'$ と $y''$ はそれぞれ $y$ の 1 階導関数と 2 階導関数を表す。

(1) $y'' + y' - 2y = 0$ の一般解 $y(x)$ を求めよ。

(2) $y'' + y' - 2y = 2e^{-x}$ の一般解 $y(x)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $y(x)$ のうち，$y(0) = 1$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ をみたすものを答えよ。

(4) $y'' + y = 2e^{-x}$ および, $y(0) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ をみたす $y(x)$ を求めよ。

(5) 実数 $a, b$ は $1 - a + b \neq 0$ をみたすとする。このとき，条件

$$y'' + ay' + by = 2e^{-x},$$
$$y(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

をすべてみたす $y(x)$ が存在するための必要十分条件を $a, b$ で表せ。

**問題 17　数理科学 2**　設問すべてについて解答すること。

**I**　有限集合 $X, Y$ に対して $X$ が $Y$ の部分集合であるとき $X \subseteq Y$ とかく。また，$|X|$ を $X$ の要素数，$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$ を差集合とする。
$E$ を有限集合とする。集合 $I$ のすべての要素が $E$ の部分集合であるとき，$I$ は $E$ の部分集合族であるという。$E$ の部分集合族 $I$ に対して，条件 (i)，(ii)，(iii) を

(i) 空集合 $\emptyset$ は $I$ の要素である

(ii) もし $A \in I$ かつ $B \subseteq A$ であるならば，$B \in I$ である

(iii) もし $A, B \in I$ かつ $|B| = |A| + 1$ であるならば，ある $b \in B \setminus A$ が存在して $A \cup \{b\} \in I$ である

で定める。(i)，(ii)，(iii) が成り立つとき，$I$ は独立集合の族であるという。このとき，次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) $E = \{1, 2, 3\}$ とする。$I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$ は独立集合の族であるか判定せよ。

(2) $E = \{1, 2, 3\}$ とする。$I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ は独立集合の族であるか判定せよ。

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

とし，$E = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ とする。また

$$I = \{\emptyset\} \cup \{A \mid A \subseteq E,\ A \text{ に属する } |A| \text{ 個のベクトルは一次独立である }\}$$

とする。このとき $I$ の要素をすべて列挙し，$I$ が独立集合の族であるか判定せよ。

(4) $E$ は有限集合であり，$I$ は独立集合の族であるとする。さらに $M, M' \in I$ かつ $M \neq E$，$M' \neq E$ とする。このとき $M, M'$ が次の 2 条件

- もし $A \in I$，$A \neq E$，$M \subseteq A \subseteq E$ であるならば，$A = M$
- もし $A' \in I$，$A' \neq E$，$M' \subseteq A' \subseteq E$ であるならば，$A' = M'$

をみたすならば $|M| = |M'|$ であることを証明せよ。

**Ⅱ** $s>0,\ p>0,\ q>0$ に対し，広義積分

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx,\quad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束することが知られている。次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) $n>1$ とする。変数変換 $x=uv,\ y=(1-u)v$ により

$$D_n=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x}{n}\le y\le nx,\ \frac{1}{n}\le x+y\le n\right\}$$

に対応する $uv$ 平面の部分集合 $E_n$ を求めよ。

(2) $p>0,\ q>0$ とし，$D=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ とする。重積分

$$I=\iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

を 2 通りのしかたで計算することにより，

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=B(p,q)\Gamma(p+q)$$

を証明せよ。

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(4) 変数変換 $u=\dfrac{1}{1+x^4}$ を利用して

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

を証明せよ。