問題１　微分積分・線形代数　出題意図・解答例

出題の意図と採点のポイント

I	• 2変数関数の停留点を求めることができるか。 • 2変数関数の極値を求めることができるか。 • 有界閉領域上で関数の最大値と最小値を求めることができるか。
II	• 行列の固有値を求めることができるか。 • 部分空間や基底を理解しているか。 • 実対称行列と直交行列の関連を理解しているか。 • 行列のべき乗を求めることができるか。

答　I　(1) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

(2) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ のとき極小値 $-\frac{16}{9}$, $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ のとき極大値 $\frac{16}{9}$

(3) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ のとき最小値 $-\frac{16}{9}$

$\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $\left(\frac{3}{2},1\right)$ のとき最大値 3

II　(1) -3（重複度 2）, 0

(2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$　（注：　答の一例）

(2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$　（注：　答の一例）

(4) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$　（注：　答の一例）

(5) $\begin{pmatrix}-2\cdot(-3)^{n-1} & (-3)^{n-1} & (-3)^{n-1}\\ (-3)^{n-1} & -2\cdot(-3)^{n-1} & (-3)^{n-1}\\ (-3)^{n-1} & (-3)^{n-1} & -2\cdot(-3)^{n-1}\end{pmatrix}$

問題１３　計算機ソフトウェア

出題の意図

(1) 二分木の走査に関する問題です。主要な走査アルゴリズムの特徴の理解、それらを実現するための疑似コードの読み取り能力、適切なデータ構造を活用した疑似コードの作成能力などを問いました。

(2) 二分探索木を用いた探索に関する問題です。二分探索木の特性に基づいて効率的に探索を行うための疑似コードの作成や、二分探索木の構造に応じた探索時の計算量について問いました。

解答例

(1)

(a) TreeTraverseA: 幅優先探索

TreeTraverseB: 深さ優先探索

(b) TreeTraverseA: 12 7 17 3 10 14 20 1 4 9 11 13 16 19 22

TreeTraverseB: 12 7 3 1 4 10 9 11 17 14 13 16 20 19 22

(c)
```
TreeTraverseB( n )
    if( n != NULL )
        TreeTraverseB( left[n] )
        print( element[n] + " ")
        TreeTraverseB( right[n] )
```

(d)

（ア） stack.push(p)

（イ） p = left[p]

（ウ） stack.size()

（エ） p = stack.pop()

（オ） p

(2)

(a)

（カ） n == NULL or element[n] == key

（キ） key < element[n]

（ク） SearchElement(right[n], key)

(b) （最良の場合） 葉ノード以外の節点が 2 つの子ノードを持ち、ルートノードから葉ノードまでの高さが全て等しい二分探索木

（最悪の場合） 葉ノード以外の全てのノードが 1 つの子ノードを持つ二分探索木

(c) （最良の場合） $\Theta(\log_2 N)$

（最悪の場合） $\Theta(N)$

出題の意図と採点のポイント

II

(1)

- 決定性有限オートマトンの基本を理解しているか。
- 決定性有限オートマトンが語を受理する動きと状態遷移図の関係を理解し，証明できるか。
- 決定性有限オートマトンが受理可能な言語の性質を理解し，証明できるか。

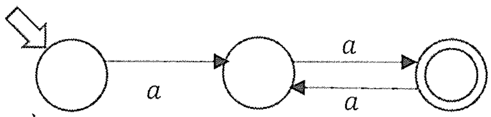
(2)

- 文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの関係を理解し，文脈自由文法からプッシュダウンオートマトンに変換できるか。
- チョムスキー標準形を理解し，文脈自由文法から変換を行えるか。
- 文脈自由文法における導出木を理解し構成することができるか。

解答例

II

(1)(a)



(b) 採点のポイント

M_1 が長さ l の語を受理するとき，D_1 における状態遷移系列（状態の系列）の長さは l であること．

状態遷移図 M_1 の状態数は k であり，$k < l$ なら，鳩ノ巣原理より系列中に必ず同じ状態が出現すること．

同じ状態が出現するならD_1に閉路が存在すること．

(c) 採点のポイント（ポンピング定理による別解あり）

L_2 を受理するオートマトンの状態遷移図には閉路が存在すること。

閉路長がmのとき， $(i+1)^2 - i^2 = m$, $(i+2)^2 - (i+1)^2 = 2m$ であること．

これらを満たす m は存在しないこと．

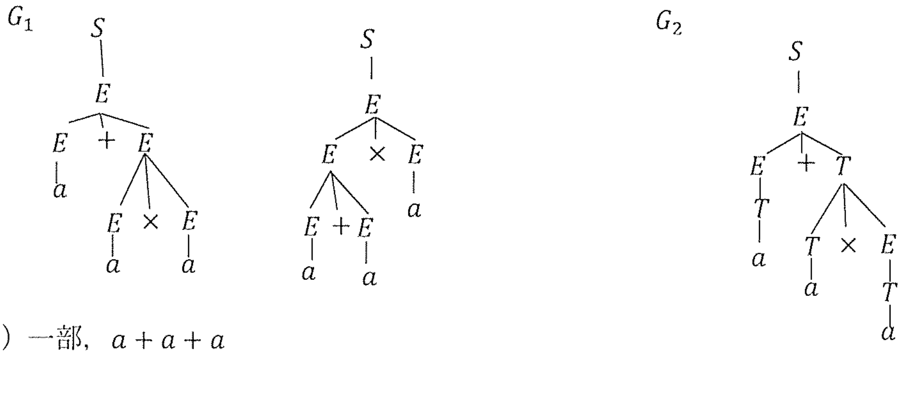
ポンピング定理を用いる場合は，決定性有限オートマトンと正規言語の関係を理解していること，および正規言語におけるポンピング定理を理解していること．

(2)

(a)$\varepsilon, S/E$, $\varepsilon, E/E+E$, $\varepsilon, E/E\times E$, $\varepsilon, E/a$, $a, a/\varepsilon$, $+, +/\varepsilon$, $\times, \times/\varepsilon$

(b) $S \to EA_1, S \to TB_1, E \to EA_1, E \to TB_1, T \to TB_1, A_1 \to A_2T, B_1 \to B_2T, T \to a, S \to a, E \to a$ （別解あり）

(c)



(d) 一部，$a + a + a$

問題14　計算機ハードウェア　出題意図・解答例

I　数値表現に関する以下の問い（1）～（4）に答えよ。ただし，括弧付きで示した添え字の数字は基数を表す。

出題意図： 基本となる数値表現を理解しているかを問い，様々なパターンに対応できるかを確認する。

（1）次の8ビットの2の補数表現で与えられた2進数を10進数に変換せよ。

(a) $10010110_{(2)}$

(b) $01101100_{(2)}$

解答：

(a) 負の数なので補数を取ると $01101010_2 = 106_{10}$ よって -106

(b) 符号ビットは0で正数：$64 + 32 + 8 + 4 = 108$

答え： (a) -106, (b) 108

（2）2の補数で表現された $11110000_{(2)}$ を算術右シフト2回したときの結果を，10進数に変換せよ。

解答： 11110000_2 は -16 を意味する。

算術右シフト2回：符号ビット1を保持 $\rightarrow 11111100_2$

これは -4 を表す。

答え： -4

（3）10進小数である0.624を誤差 ± 0.001 以内で表現できる2進小数に変換せよ。

解答： $0.625 = \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 0.101_2$

答え： $0.101_{(2)}$

（4）$2025_{(r)} = 1045_{(10)}$ が成立する基数 r を求めよ。

解答：

$$2r^3 + 0r^2 + 2r + 5 = 1045$$

$$r^3 + r = 520$$

$$(r-8)(r^2 + 8r + 65) = 0$$

2項目は解をもたないため r=8。

2,0,2,5であるため $r > 5$ であり，r^3 が支配的なためrの3乗が概ね520になる値は8（$8^3 = 512$）であるため，因数として分解できるか試せばよい。

答え： $r = 8$

II　ディジタル回路に関する以下の問い（1）～（4）に答えよ。

出題意図： デジタル回路の基本となる加算器について問い，制御信号により回路切り替え，RCA 回路，CLA 回路を導出し，その回路に対する理解を確認する。

（1）3 入力 $a, b, c_{\mathrm{in}} \in \{0, 1\}$ が入力される全加算器（FA）を半加算器を用いて設計したい。

(a) 全加算器の和 s およびキャリー c_{out} について，真理値表を作成せよ。

解答：

a	b	c_{in}	s	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

(b) 全加算器の出力である和 s およびキャリー c_{out} を論理式で表せ。

解答：

$$s = a \oplus b \oplus c_{\mathrm{in}}, \quad c_{\mathrm{out}} = a \cdot b + b \cdot c_{\mathrm{in}} + a \cdot c_{\mathrm{in}}$$

(c) 全加算器を図 2-2 の半加算器と MIL 記号を用いて図示せよ。

解答：

i. まず，a と b を一つ目の半加算器 HA に入力し，和 $s_1 = a \oplus b$，キャリー $c_1 = a \cdot b$ を得る。

ii. 次に，s_1 と c_{in} を 二つ目の HA に入力して，出力として和 $s = s_1 \oplus c_{\mathrm{in}}$，キャリー $c_2 = s_1 \cdot c_{\mathrm{in}}$ を得る。

iii. 最後に，c_1 と c_2 を OR で結合して，最終キャリー $c_{\mathrm{out}} = c_1 + c_2$ を得る。

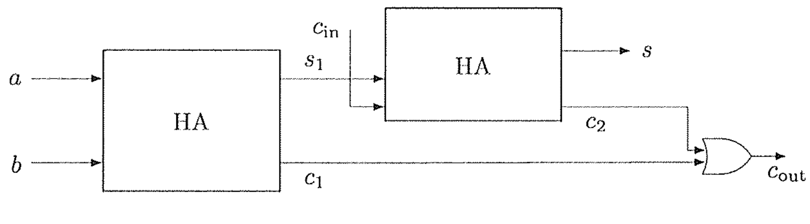


図 2-1: 全加算器

（2）3 入力 $a, b, c \in \{0, 1\}$ と 2 つの制御信号 s_0, $s_1 \in \{0, 1\}$ に対して，s_0, s_1 の状態に応じて出力を切り替える回路を設計したい。s_0, s_1 ともに 0 の時は，a, b の論理和 $a + b$ を出力し，s_0 が 0 かつ s_1 が 1 の時は，a, b の排他的論理和を出力し，s_0 が 1 の時は，3 入力 a, b, c の論理積を出力する $f(a, b, c, s_0, s_1)$ の論理式を示せ。

解答：

$$f(a, b, c, s_0, s_1) = \overline{s_0} \cdot \overline{s_1} \cdot (a + b) + \overline{s_0} \cdot s_1 \cdot (a \oplus b) + s_0 \cdot a \cdot b \cdot c$$

（3）3 ビット符号なし整数 $A = a_2a_1a_0$，$B = b_2b_1b_0$, $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ の和 $A + B$ をリップルキャリー加算器（Ripple Carry Adder; RCA）で計算したい。RCA とは，各ビットの全加算器を直列に接続し，前のビットのキャリー出力を次のビットのキャリー入力として逐次伝搬させる構成の加算器である。各全加算器は，2 つの入力ビット a_i, b_i，および前段からのキャリー入力 c_i を受け取り，出力として和 s_i と次段へのキャリー出力 c_{i+1} を生成する。なお，最下位ビットの初期キャリー入力 c_0 は 0 とする。

(a) 3 ビット RCA 全体の接続構成を示す論理回路図を示せ。なお，図 2-3 の全加算器を用いよ。

解答：各ビット位置に 1 つの全加算器を配置し，次のように接続する。

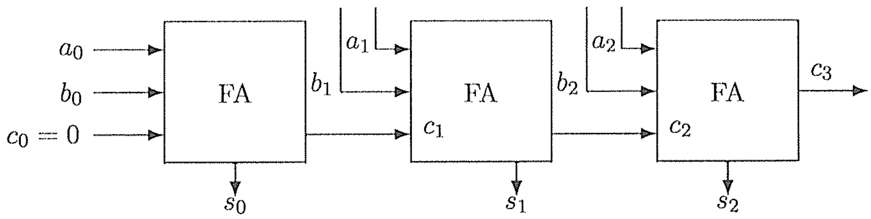


図 2-2: 3 ビット RCA 回路図

(b) n ビット RCA に拡張した場合を考える。加算結果が得られる遅延は 1 ビット RCA の何倍となるか答えよ。

解答：

n 倍

（4）キャリールックアヘッド加算器（Carry Lookahead Adder; CLA）の導出と設計をしたい。CLA とは，(3) の RCA とは異なり各ビットで発生するキャリー信号を前方に伝播させる代わりに，論理的に一括で求めることで加算の高速化を図る回路である。

(a) （1）で導出した全加算器において，伝播信号 p，生成信号 g を下記で定義する。

$$p = a \oplus b, \quad g = a \cdot b$$

各ビット $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対して，伝播 $p_i = a_i \oplus b_i$，生成 $g_i = a_i \cdot b_i$ とする．また，最下位桁キャリー入力を c_0 とする．そのとき，キャリー c_1, c_2, c_3, c_4 を c_0, p_i, g_i のみを用いる論理式として導出せよ。

解答： 最下位のキャリー入力を c_0 とし，上位ビットのキャリー c_1, c_2, c_3, c_4 を以下のように論理式で一括計算する。

$$c_1 = g_0 + p_0c_0$$
$$c_2 = g_1 + p_1g_0 + p_1p_0c_0$$
$$c_3 = g_2 + p_2g_1 + p_2p_1g_0 + p_2p_1p_0c_0$$
$$c_4 = g_3 + p_3g_2 + p_3p_2g_1 + p_3p_2p_1g_0 + p_3p_2p_1p_0c_0$$

それぞれの式は，キャリーが直接生成される場合（g_i）と，前段から伝播される場合（p_i の積）を論理和で表現している。

(b) CLA の遅延のボトルネックについて簡潔に論述せよ。なお上限を 40 文字とする。

(c) CLA の利点，欠点に関してそれぞれ簡潔に論述せよ。なお上限をそれぞれ 40 文字とする。

簡潔

- 遅延：複数ビットにまたがるキャリー生成回路（多段の AND や OR 回路）がボトルネック
- 利点：n ビット加算器の高速化が可能
- 欠点：回路が複雑かつ広域な配線が必要

III　出題意図

現代のコンピュータにおいてはメモリアクセスを高速に行うことと，広大なメモリ空間をユーザーに提供することが重要な要素となっている。そこで，この２点を実現するための基本技術であるキャッシュと仮想記憶の基本を理解しているかを問う問題を出題した。

キャッシュについては記憶装置の階層構造を理解しているか，仮想記憶については仮想記憶とページングの関係について理解をしているかを問う設問を行った。

III　解答例

（1）

(a) L2 キャッシュ

(b) 主記憶

(c) ２次記憶装置

(d) L1 キャッシュは，高速にデータを提供できるように，ミス率を下げることよりもキャッシュのアクセス時間を短くすることを重視して設計される。逆に L2 キャッシュは主記憶アクセスを減らすために，キャッシュのアクセス時間を短くすることよりもミス率を下げることを重視して設計される。

（2）

(a) 主記憶の空き領域が細分化され，空き容量はあるのに，新しいプロセスに対して連続した領域を提供できない問題。

(b) ページングとは記憶領域をページと呼ばれる小さな固定領域を単位として管理する手法である。各プロセスに提供される領域は複数のページによって能動的に配置される。このため断片化される領域のサイズは高々ページサイズに限定されるため，断片化される領域の総和は主記憶の全容量に対して微々たる大きさにすぎず，問題とならない。

(c) 仮想記憶空間をページを単位として管理し，プロセッサがアクセスを要求した仮想記憶上のページを動的に実メモリ上に配置することで，実メモリより広いメモリ空間を仮想的に実現している。また，ユーザーが仮想記憶空間にアクセスした場合，そのページが実メモリ上の何処に配置されているかの対応関係をページテーブル上に保存している。実メモリ上に配置できなかったページの情報は二次記憶装置上に待避しておき，必要に応じて実メモリ上にコピーして用いる。

問題15　情報数学　出題意図・解答例

I

出題の意図：

- 確率変数の考え方が理解でき，確率やエントロピーの計算ができること。
- 条件付き確率，条件付きエントロピーの考え方が理解でき，それらの計算ができること。
- 相互情報量の意味が理解でき，その計算ができること。

（1）

$$P(S=0)=\frac{1}{4}, P(S=1)=\frac{1}{2} \quad \text{より} \quad P(S=2)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} H(S) &= -\sum_{s\in\{0,1,2\}} P(S=s)\log_2 P(S=s) \\ &= -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} \quad = \quad \frac{3}{2} \end{aligned}$$

（2）X, Y, S, T ならびに $P(S,T)$ の関係を表にまとめると以下のようになる。

S	T	X	Y	$P(S,T)$
0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
0	1	1	0	$\frac{1}{16}$
0	2	2	0	$\frac{1}{16}$
0	3	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	1	0	$\frac{1}{8}$
1	1	2	1	$\frac{1}{8}$
1	2	0	2	$\frac{1}{8}$
1	3	1	0	$\frac{1}{8}$
2	0	2	0	$\frac{1}{16}$
2	1	0	2	$\frac{1}{16}$
2	2	1	1	$\frac{1}{16}$
2	3	2	0	$\frac{1}{16}$

これを利用して，

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(S=0,T=0)+P(S=0,T=3)+P(S=1,T=2)+P(S=2,T=1) \\ &= \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \quad = \quad \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(S=0,T=1)+P(S=1,T=0)+P(S=1,T=3)+P(S=2,T=2) \\
&= \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \quad = \quad \frac{3}{8} \\
P(X=2) &= P(S=0,T=2)+P(S=1,T=1)+P(S=2,T=0)+P(S=2,T=3) \\
&= \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \quad = \quad \frac{5}{16}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(S=0,T=0)+P(S=0,T=1)+P(S=0,T=2)+P(S=0,T=3) \\
&\quad +P(S=1,T=0)+P(S=1,T=3)+P(S=2,T=0)+P(S=2,T=3) \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \quad = \quad \frac{5}{8} \\
P(Y=1) &= P(S=1,T=1)+P(S=2,T=2) \\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{16} \quad = \quad \frac{3}{16} \\
P(Y=2) &= P(S=1,T=2)+P(S=2,T=1) \\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{16} \quad = \quad \frac{3}{16}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= -\sum_{y\in\{0,1,2\}} P(Y=y)\log_2 P(Y=y) \\
&= -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8}-\frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16}-\frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} \\
&= \frac{27}{8}-\frac{3}{8}\log_2 3-\frac{5}{8}\log_2 5
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
P(Y=0|X=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)} = \frac{P(S=0,T=0)+P(S=0,T=3)}{P(X=0)} \\
&= \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{2}{5} \\
P(Y=1|X=0) &= 0 \\
P(Y=2|X=0) &= \frac{P(X=2,Y=0)}{P(X=0)} = \frac{P(S=1,T=2)+P(S=2,T=1)}{P(X=0)} \\
&= \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5} \\
P(Y=0|X=1) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)} = \frac{P(S=0,T=1)+P(S=1,T=0)+P(S=1,T=3)}{P(X=1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{6} \\
P(Y=1|X=1) &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)} = \frac{P(S=2,T=2)}{P(X=1)} \\
&= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6} \\
P(Y=2|X=1) &= 0 \\
P(Y=0|X=2) &= \frac{P(X=2,Y=0)}{P(X=2)} = \frac{P(S=0,T=2)+P(S=2,T=0)+P(S=2,T=3)}{P(X=2)} \\
&= \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5} \\
P(Y=1|X=2) &= \frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)} = \frac{P(S=1,T=1)}{P(X=2)} \\
&= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}} = \frac{2}{5} \\
P(Y=2|X=2) &= 0
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_{x\in\{0,1,2\}}\sum_{y\in\{0,1,2\}} P(X=x)P(Y=y|X=x)\log_2 P(Y=y|X=x) \\
&= -\frac{5}{16}\left(\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5}+0\log_2 0+\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\log_2\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}+0\log_2 0\right) \\
&\quad -\frac{5}{16}\left(\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5}+0\log_2 0\right) \\
&= \frac{1}{8}+\frac{5}{16}\log_2 5
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y)-H(Y|X) \\
&= \frac{27}{8}-\frac{3}{8}\log_2 3-\frac{5}{8}\log_2 5-\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{16}\log_2 5\right) \\
&= \frac{13}{4}-\frac{3}{8}\log_2 3-\frac{15}{16}\log_2 5
\end{aligned}
$$

Ⅱ

出題意図：集合の基礎（要素の列挙，要素数，和集合など）の理解度を確認します。

解答例：

（１） $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

（２） $|2^B| = 2^{|B|} = 2^4 = 16$

（３） $|2^A \cup 2^B| = 2^3 + 2^4 - 2^2 = 20$

Ⅲ

出題意図：

（１）ではオイラー閉路という代表的なトピックを通して，グラフに関する基礎知識の理解度を確認します。（２）では，図ではなく数式を用いて記述されるグラフについて出題することでグラフの数学的な定義を理解しているかどうかを確認します。また，解答には場合の数を数える必要があるため複合的な問題にもなっています。

解答例：

（１） 奇点を含むグラフはオイラー閉路を持たない。また，連結多重グラフに奇点が存在しないならばオイラー閉路を持つ。よってオイラー閉路を持つグラフはaとd。

（２） 総次数は辺の数の２倍であるため，辺の数について考える。

- グラフG_1について

  $x + y$が偶数となるのは奇数どうし 15 通り，偶数どうし 15 通りの場合であるため辺の数は 30 であり，総次数は 60。

- グラフG_2について

  $x + y$が奇数となるのは奇数と偶数の組み合わせであるため辺の数は 5×5=25 であり，総次数は 50。

- グラフG_3について

  xyが３の倍数となるのは片方のみが３の倍数である 3×7=21 通り，両方とも３の倍数である６通りであるため辺の数は 27 であり，総次数は 54。

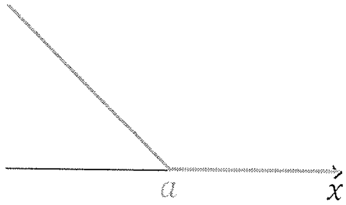
Ⅳ

出題意図：

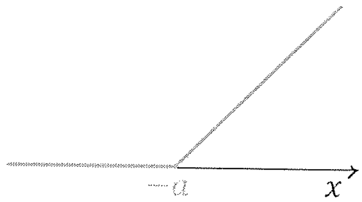
単射，全射，全単射などのトピックへの理解度を確認します。関数としては２層 ReLU ニューラルネットワークを題材にしています。解答するためには全体として区分線形関数となることが分かっている必要があります。場合分けや微分などを用いた単調性の証明を通して数理面の習熟度も確認します。

解答例：

（1）



$y_1 = \max(a - x, 0)$のグラフ



$y_2 = \max(a + x, 0)$のグラフ

（2） まず，$a < 0$の場合について考える。この時には，$-a \le x \le a$の範囲で常に$y_1 = y_2 = 0$となるため単射にならない。

次に，$a \ge 0$の場合について考える。この時には以下の表を作ることができる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
y_1	$a - x$	$a - x$	$a - x$	0	0
y_2	0	0	$a + x$	$a + x$	$a + x$

表より，単射であることが分かる。よって求める条件は$a \ge 0$。

（3） $g \circ h$が全単射のときhは単射でなければならない。よって$a \ge 0$の場合に限定してよい。このとき，合成関数$g \circ h$は以下の区分線形関数となる。

$$g \circ h(x) = \begin{cases} b(a - x) & x < -a \\ (b + 1)a + (1 - b)x & -a \le x \le a \\ a + x & a < x \end{cases}$$

$g \circ h$が単調増加または単調減少の場合に全単射となるため，各区間での微分の符号が等しければよい。微分は

$$\frac{dg \circ h}{dx} = \begin{cases} -b & x < -a \\ 1 - b & -a \le x \le a \\ 1 & a < x \end{cases}$$

のように与えられ，3 区間で符号が一致するのは$b < 0$で常に正（単調増加）となる場合のみであることが分かる。したがって求める条件は$a \ge 0$かつ$b < 0$。

問題16　数理科学１　出題意図・解答例

出題の意図と採点のポイント

I	• 複素関数のローラン級数を求めることができるか。 • 留数定理等を用いて複素積分を計算することができるか。
II	• 2 階斉次常微分方程式を解くことができるか。 • 2 階非斉次常微分方程式を解くことができるか。 • 与えられた条件を満たす常微分方程式の解を求めることができるか。 • 常微分方程式の解の存在条件を記述することができるか。

答　I　(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}z^{2k-3}$,　　(2) $2\pi i$

(3) $\dfrac{2n+1}{2}\pi i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,　　(4) $-\dfrac{\pi^4 i}{4}$

II　C_1, C_2 を任意定数とする。

(1) $C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$,　　(2) $-e^{-x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$

(3) $-e^{-x}+2e^{-2x}$,　　(4) e^{-x}

(5) $1-a+b=2$ または $a>0$ または $b<0$

問題17　数理科学２　出題意図・解答例

出題の意図と採点のポイント

I	• 部分集合族が独立集合の族であるか判定できるか。 • 与えられた条件から独立集合の族の性質を証明できるか。
II	• 変数変換によって対応する部分集合を記述できるか。 • 2 変数関数の広義積分を計算できるか。 • 広義積分を利用してガンマ関数の値を求めることができるか。

答　I　(1)　独立集合の族でない

(2)　独立集合の族である

(3)　I の要素は

$$\emptyset, \{\boldsymbol{a}_1\}, \{\boldsymbol{a}_2\}, \{\boldsymbol{a}_3\}, \{\boldsymbol{a}_4\},$$

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}, \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4\}, \{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}, \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\},$$

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}, \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}, \{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$$

であり，I は独立集合の族である

(4)　略

II　(1)　$E_n = \left\{ (u, v) \,\middle|\, \frac{1}{n+1} \leq u \leq \frac{n}{n+1},\ \frac{1}{n} \leq v \leq n \right\}$

(2)　略　　(3)　$\sqrt{\pi}$　　(4)　略