

2027 年度（令和 9 年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

私費外国人留学生

専門試験問題

情報工学系

（ネットワークプログラム、知能情報プログラム、メディア情報プログラム、情報数理プログラム）

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は、1 ページから 20 ページまであります。解答用紙は、6 枚あります。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせてください。
3. 下記表の問題番号 1, 13 から 17 の中から 2 題を解答してください。1 題につき解答用紙 1 枚を使用して解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
1	微分積分・線形代数 Calculus and linear algebra
13	計算機ソフトウェア Computer software
14	計算機ハードウェア Computer hardware
15	情報数学 Mathematics for computer science
16	数理科学 1 Mathematics 1
17	数理科学 2 Mathematics 2

4. 監督者の指示に従って、問題番号、志望プログラム及び受験番号を 2 枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。
5. 計算用紙は、問題冊子の白紙ページを利用してください。
6. 解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入してください。
7. 机の上には、受験票、黒の鉛筆・シャープペンシル、消しゴム、鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。
8. コンパス及び定規等は、使用できません。
9. 時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は、使用しないでください。
10. スマートフォン、携帯電話、ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し、それらの機器のアラームを解除してから、電源を切り、かばん等に入れてください。
11. 試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は、手をあげてください。
12. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 1 微分積分・線形代数 設問すべてについて解答すること。

I $\tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数を $\text{Tan}^{-1}x$ $(x \in \mathbb{R})$ と書く。2 変数関数 f を

$$f(x, y) = \text{Tan}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$$

と定める。このとき、次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

(1) 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ。

(2) 広義積分 $I = \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2} dt$ の値を求めよ。

(3) 広義積分 $J = \int_1^\infty \frac{(\text{Tan}^{-1}t)^2}{1+t^2} dt$ の値を求めよ。

(4) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

で定める。広義 2 重積分 $K = \iint_D \frac{f(x, y)^2}{y(1+x^2+y^2)} dx dy$ の値を求めよ。

II 実数 t に対して、行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ t & -t-2 & -t \\ t+3 & t+5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = A + \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

(1) A の逆行列が存在しないように t の値を定めよ。

(2) $t > 0$ とし、

$$\boldsymbol{v}_1 = A \begin{pmatrix} 2027 \\ 2028 \\ 2029 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = A \begin{pmatrix} 2028 \\ 2029 \\ 2030 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = A \begin{pmatrix} 2029 \\ 2027 \\ 2028 \end{pmatrix}$$

と定める。 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で張られる平行六面体の体積を t を用いて表せ。

(3) B の階数を求めよ。

(4) $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルを $\mathbf{0}$ とする。 $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ が $\mathbb{R}^3$ の 1 次元部分空間となるように t の値を定めよ。また、そのときの W の基底を与えよ。

問題 13 計算機ソフトウェア 設問についてすべて解答すること。

I ハッシュ法に関する (1) ~ (3) の問いに答えよ。

時間計算量については、 O 記号を用いてタイトな漸近的評価で示せ。

(1) 次の文章中の空欄 (A)~(E) に該当する適切な語句をそれぞれ答えよ。

ハッシュ法は探索アルゴリズムの一種である。ハッシュ法では、(A)と呼ばれる、配列に基づくデータ構造によってデータ集合を管理し、(B)という固定長の数値を用いて効率的にデータを探索する。(B)は(C)によって算出され、その値は入力データ（探索キー）に応じて変化する。なお、異なる探索キーであっても(C)の出力が一致する場合があります、これを(D)という。(D)が発生すると、データの格納先が一意に定まらないため、適切な対処が必要になる。例えば、(A)内における別の格納先を求めなおす方法（(E)法）などがある。

※以降、(A)を「データ構造 A」、(C)を「処理 C」、(D)を「現象 D」と表記する。

また、入力データ数とデータ構造 A における配列のサイズ（長さ）をそれぞれ n, m とする ($n \ll m$)。

(2) 次の処理 (a)~(c) における最悪の時間計算量をそれぞれ答えよ。現象 D が起きた際は (1) で言及した方法で対処し、線形探索によって格納先を求めなおすものとする。

(a) データ x を新規に格納 (b) 格納済みのデータ y を探索 (c) 未格納のデータ z を探索

(3) データ構造 A と処理 C を二種類ずつ使用するハッシュ法（改良ハッシュ法）を考える。改良ハッシュ法における格納処理と探索処理のアルゴリズムを図 1 に示す。アルゴリズム中の A_1, A_2 は、それぞれデータ構造 A の役割を果たす配列（サイズ m ）である。同様に、 f_1, f_2 はそれぞれ処理 C として機能する関数であり、ともに同じ値域 $\{0, 1, \dots, m-1\}$ を持ち、定数時間で処理が完了する。 $MaxLoop$ は繰り返し回数の上限を表す定数であり、 $MaxLoop = \lceil \log_2 n \rceil$ ($\lceil \cdot \rceil$ は切り上げ関数) として定義する。また、 NIL は配列中の空き領域を表す。

<pre># データ x をデータ構造 A に格納する # 戻り値: True (成功), False (失敗) hash_insert(x) if hash_search(x) then return True loop MaxLoop times x ↔ A₁[f₁(x)] # 値をスワップ if x == NIL then return True x ↔ A₂[f₂(x)] # 値をスワップ if x == NIL then return True endloop return False</pre>	<pre># データ x がデータ構造 A に格納されているか判定する # 戻り値: True (格納済み), False (未格納) hash_search(x) if (F) then return True elseif (G) then return True return False</pre>
--	---

(a) データの格納処理

(b) データの探索処理

図 1: 改良ハッシュ法のアルゴリズム

この改良ハッシュ法について、(i) ～ (iii) の問いに答えよ。

(i) 図 1(b) の空欄 (F), (G) に該当する処理を、図 1(a) の表記にならってそれぞれ記述せよ (順不同)。

(ii) 改良ハッシュ法について、次の処理 (a)～(c) における最悪の時間計算量をそれぞれ示せ。

(a) データ x を新規に格納 (b) 格納済みのデータ y を探索 (c) 未格納のデータ z を探索

(iii) 入力データ列 $S = \{3, 7, 13, 14, 18, 24, 25\}$ ($n=7$) が与えられており、図 1(a) のアルゴリズムを用いて、先頭の値から順に A_1 または A_2 への格納を試みる。なお、 A_1 および A_2 の初期状態は空 (すべての箇所が NIL) である。図 2 は、 S 中の全てのデータを格納した際の状態を表している。ここで、7, 13, 24 が最終的に格納される箇所を図 2 中の (a)～(j) からそれぞれ選べ。

m および f_1, f_2 の定義は次のとおりである。

$$m = 11, \quad f_1(x) = x \bmod m, \quad f_2(x) = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \bmod m \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{ は切り捨て関数})$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_1			(a)	(b)	(c)			(d)	(e)		

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_2		3	(f)	(g)	(h)			(i)	(j)		

図 2: 入力データ列 S 格納後における配列 A_1, A_2 の状態
(空欄の箇所はすべて NIL)

II 形式言語に関する以下の(1)および(2)の問いに答えよ。

(1) 次の言語 L_1 に関して、以下の(a)および(b)の問いに答えよ。

$$L_1 = \{a^p \mid p \text{ は } 12 \text{ 以下の素数}\}$$

ここで、アルファベット Σ は、 $\Sigma = \{a\}$ とする。

- (a) L_1 が正規言語であるかどうかを理由とともに答えよ。ただし、正規言語でないと主張する場合には、正規言語の繰り返し定理（ポンピング補題）を用いて証明せよ。
- (b) L_1 が文脈自由言語であるかどうかを理由とともに答えよ。ただし、文脈自由言語でないと主張する場合には、文脈自由言語の繰り返し定理（ポンピング補題）を用いて証明せよ。

(2) 文法 $G_2 = \langle \{S, T, B\}, \{a, b\}, P, S \rangle$ 、および、 G_2 が生成する言語 $L(G_2)$ に関して、以下の(a)～(d)の問いに答えよ。ここで、 $P = \{S \rightarrow aTb, T \rightarrow aTB, T \rightarrow TB, T \rightarrow b, B \rightarrow b\}$ とする。

- (a) G_2 に基づいて、 $L(G_2)$ を受理するプッシュダウンオートマトン M_2 を構築し、その状態遷移図を示せ。ただし、 M_2 の状態数は 1 とする。
- (b) $L(G_2)$ が正規言語であるかどうかを理由とともに答えよ。ただし、正規言語でないと主張する場合には、正規言語の繰り返し定理（ポンピング補題）を用いて証明せよ。
- (c) $L(G_2)$ が文脈自由言語であるかどうかを理由とともに答えよ。ただし、文脈自由言語でないと主張する場合には、文脈自由言語の繰り返し定理（ポンピング補題）を用いて証明せよ。
- (d) G_2 をチョムスキー標準形（Chomsky Normal Form）で表すことは可能かどうかを答えよ。また、可能であると主張する場合にはその文法を示し、不可能であると主張する場合にはその理由を述べよ。

問題 14 計算機ハードウェア 設問についてすべて解答すること。

I 数値表現に関する以下の問い (1) ~ (4) に答えよ。ただし、括弧付きで示した添字の数値は基数を表す。

(1) 次の符号無し 2 進数を 10 進数に変換せよ。

(a) $101010_{(2)}$

(b) $101.011_{(2)}$

(2) 次の 10 進数を 2 進数, 8 進数に変換せよ。

(a) $207_{(10)}$

(b) $68.625_{(10)}$

(3) 次の 16 進数演算を行え。演算結果は 16 進数で表せ。

(a) $A4B9C7_{(16)} + 23EA85_{(16)}$

(b) $A4B9C7_{(16)} - 23EA85_{(16)}$

(4) 次の 2 の補数で表現された 8 ビットの 2 進数演算を行え。演算結果は 2 の補数で表現された 8 ビットの 2 進数で表せ。

(a) $1011\ 0011_{(2)} - 0010\ 1110_{(2)}$

(b) $1010\ 1000_{(2)} \div 0000\ 0100_{(2)}$

II デジタル回路に関する以下の問い (1) ~ (4) に答えよ。

2 つの 2 ビット 2 進数 $A = A_1A_0$, $B = B_1B_0$ を入力とし、大小関係を表す 3 ビットのビット列 $Z = Z_2Z_1Z_0$ を出力する比較器 C を構成したい。ただし、 $A_1, A_0, B_1, B_0, Z_2, Z_1, Z_0 \in \{0, 1\}$ である。比較器 C は $A > B$ のとき $Z = 001$, $A = B$ のとき $Z = 010$, $A < B$ のとき $Z = 100$ を出力するものとする。なお、論理変数 X の否定は $\overline{X}$ によって表すこととする。

(1) $A_0 < B_0$ のとき、 Z_0 の論理式を積和標準形によって表せ。ただし、利用可能な論理変数は A_1 , B_1 とする。

(2) $A_0 > B_0$ のとき、 Z_0 の論理式を積和標準形によって表せ。ただし、利用可能な論理変数は A_1 , B_1 とする。

(3) 図 1 に示されたカルノー図を解答用紙に転記したうえで、 Z_0 のカルノー図を完成させよ。また、 Z_0 の論理式を、最も簡単化した積和形によって表せ。ただし、利用可能な論理変数は A_1 , A_0 , B_1 , B_0 とする。

(4) Z_2 , Z_0 を入力し、 Z_1 を出力する論理回路は一つの論理ゲートによって構成可能である。

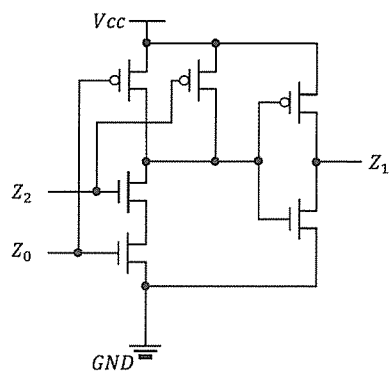
(a) Z_2 , Z_0 を入力し、 Z_1 を出力する論理ゲートを AND, OR, NAND, NOR から一つ選択せよ。

(b) Z_2 , Z_0 を入力し、 Z_1 を出力する論理ゲートの CMOS 回路を図 2 の (i), (ii), (iii), (iv) から一つ選択せよ。ここで、CMOS 回路はゲート入力が高電位であるときに電流が流れる nMOS とゲート入力が低電位であるときに電流が流れる pMOS を相補的に用いた回路であり、nMOS と pMOS は図 3 を用いて表される。また、図 2 の V_{cc} は電源、 GND は接地を表す。

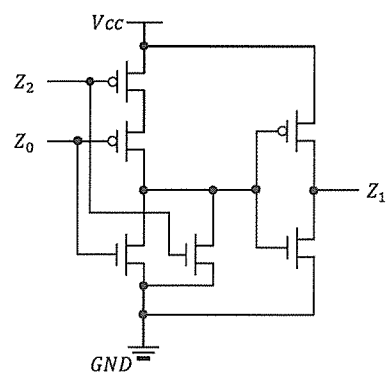
$B_1B_0 \backslash A_1A_0$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

図 1: カルノー図

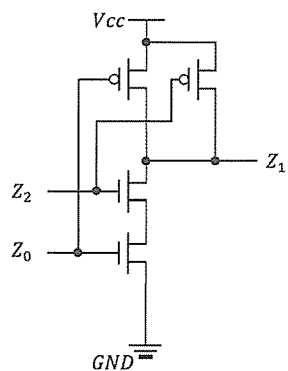
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

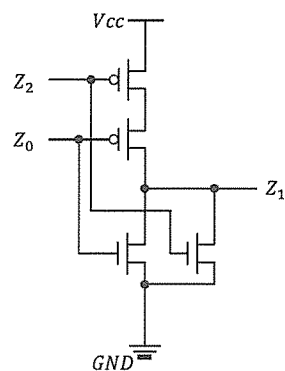


図 2: CMOS 回路

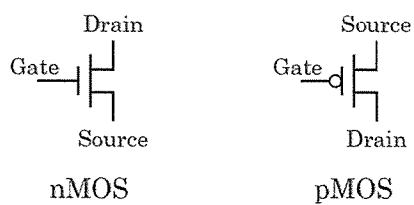


図 3: nMOS, pMOS

III 表 1 に示す構成のキャッシュおよびそれを搭載したプロセッサを考える。

表 1: キャッシュ構成

キャッシュ方式	2 ウェイ・セットアソシアティブ
キャッシュ総容量	16KB (ただし 1KB = 1024B とする)
ブロックサイズ	32B
置き換えポリシー	LRU (最近最も使われていないものを置き換える)
キャッシュアクセス時間	1 サイクル
主記憶アクセス時間	100 サイクル
仮想アドレス・物理アドレス	各 32bit
ページサイズ	4KB
TLB アクセス時間	1 サイクル
プロセッサ	5 段パイプライン (IF・ID・EX・MEM・WB)
クロック周波数	1GHz (1 サイクル=1ns)
キャッシュ・TLB アクセス	MEM ステージで行われる
アドレッシング方式	バイトアドレッシング (1 アドレス=1 バイト)

なお、このプロセッサは TLB (Translation Lookaside Buffer) を備えているとする。TLB は仮想アドレスから物理アドレスへの変換に用いられる機構であり、直近に使用された複数のアドレス変換結果をキャッシュする小容量の高速メモリである。アドレス変換の手順は以下に示すとおりであるとする。

- TLB ヒットした場合、TLB から物理フレーム番号を取得し、物理アドレスを得る
- TLB ミスし、ページテーブルを参照して有効ビットが立っていた場合、物理フレーム番号を取得し、TLB を更新する
- TLB ミスし、ページテーブルを参照して有効ビットが立っていなかった場合、ページフォルトが発生し、OS によりディスクからページがメモリに転送される

以上の条件のもと、以下の問いに答えよ。

(1) このキャッシュの構造について、以下のそれぞれの値を答えよ。

- (a) ブロック内オフセットのビット幅
- (b) セット数
- (c) 上記 (b) のセット数を表現するために必要なインデックスのビット幅
- (d) タグのビット幅

(2) いま、ページテーブルおよび TLB の内部状態がそれぞれ図 4、図 5 に示すとおりであるとする。

ページ番号	物理フレーム番号	有効ビット
0	3	1
1	7	1
2	-	0
3	1	1

図 4：ページテーブルの状態

タグ (ページ番号)	物理フレーム番号	有効ビット
1	7	1
3	1	1
5	-	0

図 5：TLB の状態

- (a) 仮想アドレス 0x00001ABC にアクセスがあった場合、そのページ番号とページオフセットを答えよ。
- (b) 仮想アドレス (i) 0x00001ABC, (ii) 0x00000123, (iii) 0x00005ABC に順にアクセスがあったとする。それぞれのアクセスにおいて、TLB ヒット、TLB ミス、ページフォルトのいずれが発生するか答えよ。また、TLB ヒットの場合はその物理アドレスも併せて答えよ。
- (3) あるキャッシュセット（初期状態は空であるとする）に対して、以下の(i)～(v)の順でブロックへのアクセスが発生したとする。各アクセスに対してキャッシュヒット・キャッシュミスの別を答えよ。なお、キャッシュミスの場合は、置き換えられるタグを併せて答えよ。
- (i) タグ「A」を持つブロック
 - (ii) タグ「B」を持つブロック
 - (iii) タグ「A」を持つブロック
 - (iv) タグ「C」を持つブロック
 - (v) タグ「B」を持つブロック
- (4) 現実のプロセッサでは、メモリアクセスが発生するたびに、TLB によるアドレス変換とキャッシュへのデータアクセスの両方が行われる。表 2 に示す条件のもと、設問に答えよ。

表 2：TLB・キャッシュ・パイプラインに関する条件

TLB ヒット率	95%
TLB ミス時のページテーブル参照時間	10 サイクル (キャッシュ経由)
キャッシュヒット率	97%
キャッシュミスペナルティ	100 サイクル
メモリアクセスを伴う命令の割合	30%
キャッシュ・TLB ミスなし時の CPI	1
ページフォルト発生時のペナルティ	10,000,000 サイクル
ページフォルト率 (メモリアクセス命令あたり)	0.001%

- (a) TLB およびキャッシュの両方を考慮した平均メモリアクセス時間 (以下 AMAT とする) を以下の式に従ってサイクル数で答えよ。

$$\text{AMAT} = \text{TLB アクセス時間} + \text{TLB ミス率} \times \text{ページテーブル参照時間} \\ + \text{キャッシュアクセス時間} + \text{キャッシュミス率} \times \text{ミスペナルティ}$$

- (b) キャッシュミスおよび TLB ミスによる, パイプラインストールを考慮した実効 CPI (Cycles per Instruction) を以下の式に従って求めよ。

$$\text{実効 CPI} = \text{ミスなし時 CPI} \\ + \text{メモリアクセス命令の割合} \times (\text{TLB ミス率} \times \text{ページテーブル参照時間} \\ + \text{キャッシュミス率} \times \text{ミスペナルティ})$$

- (c) 以下の 2 つの場合について, それぞれ実効 CPI を求めよ。

- ・ TLB のみが存在し, キャッシュが存在しない場合
- ・ キャッシュのみが存在し, TLB が存在しない場合

- (5) 問い (4) の条件に加えて, ページフォルトが発生する場合を考える。ページフォルト発生時は, 命令パイプラインはフラッシュされたうえで OS に制御が移り, ディスクからページがメモリに転送される。

- (a) ページフォルトによる, 実効 CPI の悪化量を求めよ。
- (b) 問い (4) (b) の結果にページフォルトの影響を加えた実効 CPI を求めよ。
- (c) 以下の (i), (ii) に示す 2 つの改善が適用された場合の実効 CPI をそれぞれ求めよ。
- 改善 (i) : TLB ヒット率が 95% から 99% に改善した場合
- 改善 (ii) : ページフォルト率が 0.001% から 0.0001% に改善した場合

問題 15 情報数学 設問についてすべて解答すること。

I 2元入力・2元出力の Z 通信路を考える。入力を確率変数 $X \in \{0, 1\}$, 出力を確率変数 $Y \in \{0, 1\}$ とし, 遷移確率は

$$\begin{aligned} P_{Y|X}(0|0) &= \frac{1}{2}, & P_{Y|X}(1|0) &= \frac{1}{2}, \\ P_{Y|X}(1|1) &= 1, & P_{Y|X}(0|1) &= 0 \end{aligned}$$

で与えられるものとする。また,

$$P_X(0) = q, \quad P_X(1) = 1 - q$$

とする ($0 \leq q \leq 1$)。2元エントロピー関数を

$$h(\theta) = -\theta \log_2 \theta - (1 - \theta) \log_2 (1 - \theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

とする。ただし, $h(0) = h(1) = 0$ とする。さらに, 相互情報量 $I(X; Y)$ は q の関数として上に凸な関数である。次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。解答において対数の底は 2 とすること。また, 計算結果は可能な限り簡約化した上で解答すること。必要ならば

$$h'(\theta) = \log_2 \frac{1 - \theta}{\theta}$$

を用いてよい。

- (1) 出力分布 $P_Y(0)$, $P_Y(1)$ をそれぞれ q を用いて表せ。
- (2) 条件付きエントロピー $H(Y | X)$ を求めよ。
- (3) 相互情報量 $I(X; Y)$ を q の関数として求めよ。ただし, 結果は 2元エントロピー関数を用いて表すこと。
- (4) $I(X; Y)$ を最大にする q を求めよ。
- (5) この Z 通信路の通信路容量を求めよ。ただし, 結果は 2元エントロピー関数を用いずに表現すること。

II 2元体 $\mathbb{F}_2$ 上の $(7, 4, 3)$ ハミング符号 C_{Hamming} を考える。 C_{Hamming} の検査行列を

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。 C_{Hamming} は

$$C_{\text{Hamming}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^7 \mid H\mathbf{x}^T = \mathbf{0} \}$$

で定義されるものとする。ベクトルの重み $w(\mathbf{x})$ とは, $\mathbf{x}$ の成分のうち 1 であるものの個数をいう。また, 2つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^7$ のハミング距離を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

で定める。次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。

- (1) C_{Hamming} の符号長 n を求めよ。また, 符号語の総数 M を求めよ。

- (2) 次の2つのベクトルが符号語であるか、それぞれ判定せよ。

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1).$$

判定の理由も述べよ。

- (3) 2元線形符号 C に対して、最小距離

$$d_{\min} = \min_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

は

$$d_{\min} = \min_{\substack{c \in C \\ c \neq \boxed{B}}} \boxed{A}$$

と表される。空欄 A, B に適切な式を入れよ。ただし、詳細の説明は不要である。

- (4) C_{Hamming} には、重み 2 の符号語が存在しないことを示せ。
(5) C_{Hamming} の最小距離が 3 であることを示せ。ただし、前小問 (3), (4) の結果と重み 1 の符号語が存在しない事実は証明なく利用してよい。

III 次の (1) および (2) の命題が恒真 (トートロジー) であるとき, $P(x, y), Q(x, y)$ それぞれに適切な論理式を答えよ。

(1) $(x \rightarrow (y \rightarrow x)) \leftrightarrow (\neg x \vee P(x, y))$

(2) $\forall x(\neg x \wedge y) \leftrightarrow \neg \exists x(Q(x, y))$

IV 順序が付いていない頂点集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 有向辺集合 $E \subseteq \{(v_i, v_j) \mid v_i \in V, v_j \in V, i \neq j\}$ (ただし $|E| = m$ とする) からなる単純有向グラフ $G = (V, E)$ を考える。 G の各頂点に 1 から n の整数のうちいずれか一つを識別子として割り当てる関数を $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ とする。以下の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。

(1) m の最大値, 最小値をそれぞれ答えよ。

(2) $m = 0$ かつ f が全単射関数の場合にグラフは全部で何通りあるか答えよ。

(3) $m = 0$ かつ f が任意の関数 (全射, 単射, 全単射, それ以外の全てを含む) の場合にグラフは全部で何通りあるか答えよ。

(4) $m = 1$ かつ f が全単射関数の場合にグラフは全部で何通りあるか答えよ。

(5) 任意の関数 f によって任意の頂点 $v_i \in V$ に割り当てられた識別子を $f(v_i)$ と表すものとする。また, G の全ての辺に重みを与える関数を $g: E \rightarrow \mathbb{Z}$, $g((v_i, v_j)) = f(v_i) - f(v_j)$ ($\mathbb{Z}$ は整数の集合) とする。このとき, 次の命題の真偽を答え, それを証明せよ。

命題: 「 G 上に単純有向閉路があるならば,

その単純有向閉路に含まれるすべての辺の重みの和は 0 である。」

V 次の (1) および (2) の代数について, 単位元と全ての元に対する逆元をそれぞれ答えよ。ただし存在しない場合は「なし」と答えよ。また, $\mathbb{Z}$ は整数の集合を表す。

(1) $(Z_5, +_5)$ (ただし, Z_5 は 5 を法とする剰余類の集合であり $Z_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$, $+_5$ は Z_5 上の 2 項演算であり $[x] +_5 [y] = [x + y]$ ($[x] \in Z_5, [y] \in Z_5$) とする。)

(2) $(S, \circ)$ (ただし, $S = \{h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid h \text{ は全単射関数}\}$, $\circ$ は 2 つの関数の合成演算であり $(h \circ j)(x) = h(j(x))$, $h \in S, j \in S$ とする。)

問題 16 数理科学 1 設問すべてについて解答すること。

I 複素関数 f を

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z^5(z^4 + 1)}$$

と定める。このとき、次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

- (1) $z = 0$ を中心とする $f(z)$ のローラン級数を領域 $0 < |z| < 1$ において求めよ。
- (2) $z^4 + 1 = 0$ をみたす複素数 z をすべて求めよ。
- (3) (2) で求めた各値における $f(z)$ の留数を計算せよ。
- (4) 閉曲線 $C: z = 2e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) に対して、複素積分 $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ。

II 関数 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) を周期 2π の周期関数に拡張した関数を $\tilde{f}$ とし、そのフーリエ級数展開

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

を考える。このとき、次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

- (1) a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) の値を求めよ。
- (2) $\tilde{f}(x)$ のフーリエ級数展開を与えよ。
- (3) (2) を利用して $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ の値を求めよ。
- (4) パーセバルの等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

を利用して $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ の値を求めよ。

問題 17 数理科学 2 設問すべてについて解答すること。

I 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をみたすとする。ただし, tA は A の転置行列である。正の整数 m に対し, 複素数を係数とする z の多項式のうち高々 m 次のもの全体からなる集合を V_m で表す。任意の

$$f(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k \in V_m \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

に対し, $(Af)(z) \in V_m$ と $\langle f, f \rangle \in \mathbb{C}$ を

$$(Af)(z) = \sum_{k=0}^m a_k (az + c)^k (bz + d)^{m-k},$$

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^m k!(m-k)! a_k \overline{a_k}$$

で定める。また, $\zeta_m = e^{2\pi i/m} = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m} \in \mathbb{C}$ とし,

$$f_m(z) = (z + \zeta_m)^m$$

と定める。このとき, 次の (1) ~ (5) の問いに答えよ。

(1) $a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0$ であることを示せ。

(2) $(Af_m)(z) = \{(az + c) + \zeta_m(bz + d)\}^m$ であることを示せ。

(3) $\langle f_m, f_m \rangle$ の値を m を用いて表せ。

(4) $\langle Af_m, Af_m \rangle = \langle f_m, f_m \rangle$ が成り立つことを示せ。

(5) $m = 3$ とする。多項式の和と定数倍により, V_3 は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である。

$$\{(z+1)^3, (z+\zeta_3)^3, (z+\zeta_3^2)^3, z^3\}$$

が, ベクトル空間 V_3 の基底になることを示せ。

II $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ と定める。実数を成分とする n 次正方行列 A に対し,

$$\|A\| = \max \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_2 \neq 0 \right\}$$

と定める。 D を n 次対角行列とし, D の対角成分を $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ とする。定数 c を

$$c = \max\{|d_1|, \dots, |d_n|\}$$

と定める。このとき, 次の (1), (2) の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\|D\mathbf{x}\|_2 \leq c \|\mathbf{x}\|_2$ であることを示せ。

(2) $\|D\| = c$ であることを示せ。

閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数全体からなる集合を $C[0, 1]$ とする。 $f \in C[0, 1]$ に対し,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}, \quad \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

と定める。このとき, 次の (3), (4) の問いに答えよ。

(3) $f, g \in C[0, 1]$ に対し, $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$ が成り立つことを示せ。

(4) $f \in C[0, 1]$ とする。任意の正の整数 m に対し, 次の条件をみたす $h_m \in C[0, 1]$ が存在することを示せ。

$$\|h_m\|_2 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{m} < \left(\frac{\|fh_m\|_2}{\|h_m\|_2} \right)^2 - (\|f\|_\infty)^2 < \frac{1}{m}$$