

— 物 理 —

1 長さ l の糸に質量 m のおもりをつけた単振り子の周期は、 m に依存せず、振幅が微小の場合は、振幅にも依存しない（振り子の等時性）。しかし、振幅が大きい場合には、周期は、振幅に依存する（等時性の破れ）。これについて調べよう。なお、重力加速度の大きさを g とする。

(1) 糸の鉛直線に対する傾き角を θ とする。おもりの、軌道接線方向の速度を l と θ の時間的変化率 $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ。

(2) おもりが最下点 ($\theta = 0$) を通過するときの速さを V ($V < \sqrt{2gl}$) とする。おもりの力学的エネルギーを、 m と V を用いて表せ。ただし、ポテンシャルエネルギーは、 $\theta = 0$ のときを零とする。

(3) 力学的エネルギー保存を表す式を θ , $\frac{d\theta}{dt}$, m , g , l , および問 (2) で定義した V を用いて表せ。

(4) $k = \frac{V}{2\sqrt{gl}}$ とする。 $\frac{d\theta}{dt}$ を g , l , k , $\sin\frac{\theta}{2}$ を用いて表せ。

(5) 変数変換 $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$ によって ϕ を定義する。 $\frac{d\phi}{dt}$ を g , l , k , $\sin\phi$ を用いて表せ。

(6) 振り子の最大振れ角 θ_{max} は、問 (4) より $\sin\frac{\theta_{max}}{2} = k$ で与えられる。 θ が 0 から θ_{max} まで変化すると、 ϕ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化し、これが振り子の運動の一周期の $\frac{1}{4}$ に相当するので、振り子の周期は、

$$T = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{d\phi} d\phi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{d\phi}{dt}} d\phi$$

と表すことができる。 k の関数 $K(k)$ を定積分

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

で定義するとき、 T を l , g , $K(k)$ を用いて表せ。

(7) 問 (6) で得られた T で、 $k \rightarrow 0$ の極限をとり、微小振動の場合の周期 T_0 を求めよ。

(8) 大振幅の場合、微小振動の場合に比べて、周期は長い、短い、を答えよ。

— 物 理 —

2 半径 a の、無限に長い円柱状導体の、軸方向に一様な電流 I が流れている。

(1) 軸からの距離が r の、導体外 ($r > a$) の点の磁場の強さを求めよ。

(2) 軸からの距離が r の、導体内 ($r < a$) の点の磁場の強さを、電流ではなく、電流密度の大きさ J を用いて表せ。

次に、半径 a の無限に長い円柱状導体から、半径 b ($b < a$) の、無限に長い円柱状領域を、くりぬいて、空洞にした（以下、空洞を持つ導体と呼ぶことにする）。くりぬいた領域の軸は、半径 a の円柱状導体の軸 (z 軸) に平行で、そこから距離 d ($d < a - b$) 離れている。この場合、デカルト座標 (x, y, z) を用いて、空洞を持つ導体領域は、 $\sqrt{x^2 + y^2} < a$ 、 $\sqrt{(x - d)^2 + y^2} > b$ 、 z は任意、と表される。空洞を持つ導体中を電流密度の z 成分が J である、一様な電流が軸方向に流れているとき（空洞中は電流は流れていない）、空洞内の磁場を次の手順で求めよう。

(3) もし仮に、空洞を持つ導体の、導体領域を、電流密度の z 成分が J の一様な電流が軸方向に流れているほかに、空洞部分にも電流密度の z 成分が J の一様な電流が軸方向に流れているとしたとき、点 (x, y, z) 、($\sqrt{x^2 + y^2} < a$ 、 z は任意) の磁場の x 成分 H_x は $-kJy$ と y 成分 H_y は kJx と表すことができる。定数 k を求めよ。

(4) もし仮に空洞部分すなわち、($\sqrt{(x - d)^2 + y^2} < b$ 、 z は任意) で表される領域だけを電流密度の z 成分が $-J$ の一様な電流が円柱の軸方向に流れていて、ほかの領域は電流が流れていないとしたとき、空洞内の点 (x, y, z) の磁場の x 成分 H_x と y 成分 H_y を求めよ。

(5) 空洞を持つ導体に電流密度の z 成分が J の一様な電流が軸方向に流れていて、空洞中は電流が流れていないとき、空洞内の磁場は前二問の結果の重ね合わせである。その x 成分 H_x と y 成分 H_y を求めよ。

(6) 空洞内の磁場について次のア、イ、ウ、エ のうち、正しいものの記号を答えよ。

ア、強さも方向も、場所によって異なる。

イ、強さは場所によって異なるが、方向はどこでも同じである。

ウ、強さはどこでも同じだが、方向は場所によって異なる。

エ、強さも方向も、どこでも同じである。