2021 年度（令和３年度）
編入学者・転入学者選抜学力検査
専門試験科目問題冊子
物理工学科

2020 年 7 月 29 日（水）10：00～12：00

注意事項

- ４題中２題を選択し解答してください。
- 解答は各問題番号に対応する解答用紙に解答してください。
- 解答用紙はホチキス止めを外して，選択した２題を提出してください。
- 試験終了後，問題用紙と計算用紙は持ち帰ってください。
- 乱丁・落丁あるいは不鮮明な場合には申し出てください。

問題1　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　次の文章を読み，(1)～(5)の問いに答えよ。

結晶を結合様式で大別すると，[A]結晶，[B]結晶，[C]結晶，[D]結晶に分けられる。[A]結晶は規則正しく並んだ陽イオンとその間を自由に動ける電子から構成され，[A]光沢と呼ばれる外観上の特徴がある。[B]結晶は陽イオンと陰イオンからできていて，強い赤外吸収を示すものが多い。[C]結晶は，最も近い原子同士が電子をわけあうことによって結合していて，きわめてかたい。[D]結晶は，不活性な原子または中性の分子が結合し結晶となったものである。

(1) A，B，C，D の名称を答えよ。

(2) 4 種類の結晶のうち，一般的に最も結合エネルギーが大きいものはどれか。A～D の記号で答えよ。

(3) 一般的に最も融点が低いのは，4 種類の結晶のうちのどれか。A～D の記号で答えよ。

(4) [A]結晶の電気伝導率の特徴を述べよ。さらに，温度を変えたときに電気伝導率がどのように変化するかを説明せよ。

(5) [B]結晶の具体例として，物質名を 1 つ挙げよ。

(問題は次のページに続く)

II　面心立方構造の結晶について，(1)～(9)の問いに答えよ。

(1) 結晶を剛体球モデルで表すとする。格子定数aを，剛体球の半径Rを用いて表せ。

(2) 結晶の充填率を求めよ。導出過程を示し，有効数字は 2 桁とせよ。

(3) 侵入型不純物原子が入る位置には，8 面体位置と 4 面体位置がある。面心立方結晶の単位格子の図を 2 つ描き，すべての原子位置を○で示し，一方の図にすべての 8 面体位置を●で，もう一方の図にすべての 4 面体位置を■で示せ。補助線などを用いてわかりやすく示すこと。

(4) 8 面体位置と 4 面体位置のそれぞれについて，結晶をひずませることなく入りうる最大の剛体球の半径r_8，r_4を求めよ。Rを用いて表すこと。

(5) 結晶のすべり変形は，最密面に沿って最密方向に結晶面がすべることによって生じる。最密面(すべり面)のミラー指数と，長さを最短周期としたときの最密方向の方位指数(すべりベクトル)を答えよ。

(6) すべり面とすべり方向の組み合わせをすべり系と呼ぶ。すべり系は何通りあるか答えよ。理由も示すこと。

(7) すべり方向にせん断応力τを作用させることにより結晶を弾性変形させ，隣接する最密面間に相対変位xが生じたとする。剛性率をG，最密面の間隔をhとし，フックの法則の式を示せ。

(8) せん断応力をさらに増やすと結晶はすべり変形を開始する。結晶には周期性があるため，せん断応力τは，変位xとすべり方向の結晶周期bを用いて

$$\tau = A\sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$$

で表せるとする(Aは定数)。この結晶の理論強度σ_{th}を求めよ。G，b，hを用いて表すこと。

(9) 面心立方結晶におけるb，hを求め，理論強度σ_{th}を，bとhを用いずに表せ。

問題２　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　次の文章を読み，(1)～(4)の問いに解答せよ。

ガラスのような透明材料の屈折率を測定するために使用される最小偏角法について説明する。屈折率を測定すべき材料で頂角がαのプリズムを作る。このプリズムを空気中に置き，図１に示すようにプリズムの一つの面から光を入射させる。プリズムへの光の入射角をθ_1，屈折角をθ_2とする。屈折の法則（スネルの法則）により，材料の屈折率がn，空気の屈折率が１ならば，n，θ_1，θ_2の間には次式の関係が成り立つ。

$$n = \boxed{\text{(a)}} \qquad (1)$$

光はプリズムを通過し，プリズムと空気の境界で屈折して出射する。出射する際の入射角をθ_3，屈折角をθ_4とすると，n，θ_3，θ_4の間の関係は次式で表される。

$$n = \boxed{\text{(b)}} \qquad (2)$$

プリズムへの入射光と出射光のなす角δを偏角という。プリズムの頂角αは

$$\alpha = \boxed{\text{(c)}} \qquad (3)$$

なので，偏角δは

$$\delta = \boxed{\text{(d)}} \qquad (4)$$

と表すことができる。入射角θ_1を変化させると，それに伴い偏角δが変化する。そこで，偏角が最小（極小値）となるような入射角を求める。偏角は入射角に依存するので，$^{d\delta}/_{d\theta_1} = 0$が成り立てばよい。$^{d\delta}/_{d\theta_1} = 0$の場合には（３），（４）式から次式が得られる。

$$\frac{\mathrm{d}\theta_4}{\mathrm{d}\theta_1} = \boxed{\text{(e)}} \qquad (5)$$

一方，（３）式から次式が得られる。

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\frac{d\theta_3}{d\theta_1} \qquad (6)$$

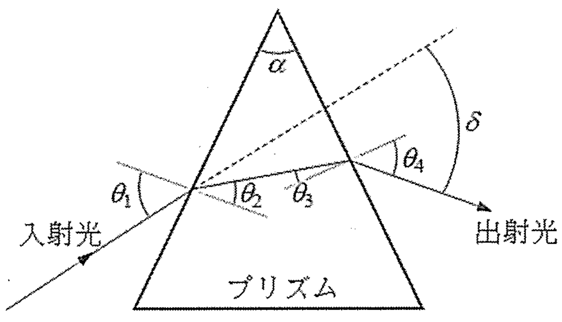

図１　最小偏角法の原理

（１）式と（２）式をそれぞれθ_1で微分して（５）式と（６）式の関係を用いて整理すると，偏角が極小値$\delta_{\min}$となる場合のθ_1，θ_2，θ_3，θ_4の間には，以下の関係が成り立つことがわかる。

$$\theta_1 = \boxed{\text{(f)}} \qquad (7)$$

$$\theta_3 = \boxed{\text{(g)}} \qquad (8)$$

よって最小偏角$\delta_{\min}$とプリズムの頂角αを用いて，プリズムの屈折率は次式で表すことができる。

$$n = \frac{\sin\boxed{\text{(h)}}}{\sin\boxed{\text{(i)}}} \qquad (9)$$

したがって，屈折率を求めたい材料をプリズム形状に加工し，その頂角と最小偏角を測定すれば，（９）式を使って屈折率を求めることができる。

(1) 空欄(a)，(b)，(c)，(d)に適切な式を記入せよ。ただし(c)，(d)の解答にはθ_1，θ_2，θ_3，θ_4以外の記号を用いてはならない。

(2) 空欄(e)に適切な数値を記入せよ。

(3) 空欄(f)，(g)に適切な式を記入せよ。

(4) 空欄(h)と(i)に入る適切な式を示せ。ただし$\delta_{\min}$とα以外の記号を用いてはならない。

Ⅱ　次の文章を読み，空欄（I），（IV）に入る適切な数式を示せ。また，空欄（II），（III）に入る適切な語句を解答用紙の解答欄から一つ選択して丸で囲め。

臨界角法は，物質の屈折率を測定する簡便な方法としてアッベ屈折計に使用されている。図２はその原理を示している。屈折率がNの材料で作られた参照プリズムの上に測定試料をのせる。参照プリズムには，その屈折率が測定試料の屈折率より大きいものを使う。測定試料を通過して参照プリズムとの境界面で屈折する光の屈折角が最大となるのは，光が試料とプリズムの境界面に平行に入射した場合である。この場合，光は臨界角ϕで屈折する。このとき，測定試料の屈折率nはNとϕを使って次式のように表すことができる。

$$n = \boxed{\text{(I)}} \qquad (10)$$

臨界角より $\boxed{\text{(II)}}$ 角度で屈折する光は存在しない。したがって，図のＡ点から様々な角度で試料から入射して参照プリズムを通過して空気中に出射する光を観測すると，Ｐ点より下方は上方よりも $\boxed{\text{(III)}}$ 見える。臨界角で屈折した光が参照プリズムを出射する角度をβとすると，試料の屈折率nはNとβを使って次式で与えられる。

$$n = \boxed{\text{(IV)}} \qquad (11)$$

このように，参照プリズムの屈折率Nと出射角βの値から試料の屈折率を求めることができる。

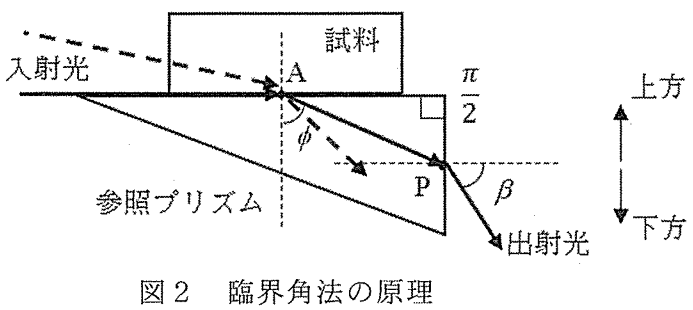

図２　臨界角法の原理

問題３　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　バネ定数k，自然長lの軽いバネを鉛直に立て，上端に質点とみなせる質量mの物体Ａを，下端に板Ｂを取り付ける。バネは常に鉛直に立っていて，物体Ａは鉛直方向の１次元振動をする．鉛直上方が正の向きとなるようにx軸をとり，物体Ａの位置を座標xで指定する．重力加速度の大きさをgとし，空気抵抗は働かないとして，次の(1)～(7)の問いについて答えよ。

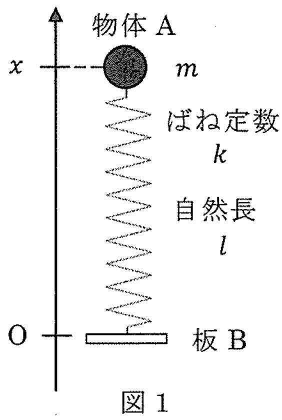

図１

バネの下端が原点Ｏに一致するように板Ｂを固定し物体Ａを振動させる．

(1) つりあいの位置の物体Ａの座標を求めよ。

(2) 物体Ａの運動方程式を立てよ。また，振動の角振動数ωを求めよ。

(3) つりあいの位置で，時刻０に下向きに速さv_0の初速を物体Ａに与えた。時刻tの物体Ａの座標$x(t)$を求めよ。角振動数はωとすること。

次に，板Ｂを，バネの下端の座標Xが$X = D\sin\Omega t \quad (|D| \ll l)$となるように動かす。

(4) バネの伸びをx, X, lを使って表せ。

(5) 物体Ａの運動方程式を立てよ。

(6) 時刻０で物体Ａがつりあいの位置で静止していたとして，時刻tの物体Ａの座標$x(t)$を求めよ。設問(2)で求めた角振動数はωとし，答のみならず，導出過程も記述せよ。

(7) 上の設問では空気抵抗を無視したが，速度に比例する空気抵抗が働いている場合，振動を始めてから十分に時間が経過した後の物体Ａがどのような振動をするか，簡単に(1～2行程度で)述べよ。

II　摩擦のある水平面上に，中央に軽い伸び縮みしない糸をすべらないように巻きつけた一様な剛体円柱(質量M，半径a)を置き，糸を円柱の中心軸に垂直な水平方向に大きさPの力で引っ張って転がす(図２)。糸を引く方向にx軸をとり，円柱の重心Ｇの位置を座標xで指定する。円柱の回転角θは時計回りを正にとる。円柱と水平面の間の摩擦力をfとし，fの符号は図２のようにx軸の負方向を正にとる。円柱と水平面との間の静止摩擦係数をμ，円柱は水平面上をすべらず転がるとして，以下の(1)～(6)の問いに答えよ。

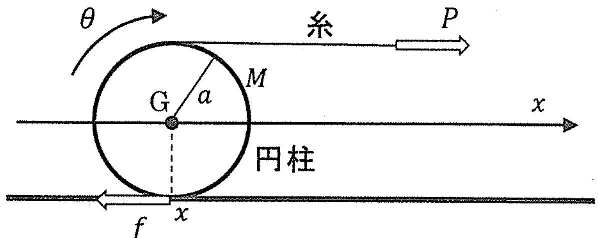

図２

(1) 円柱の重心の運動方程式を立てよ。

(2) 円柱の中心軸まわりの回転の運動方程式を立てよ。
　　中心軸まわりの慣性モーメントをIとする。

(3) 円柱の重心の加速度$\ddot{x}$と円柱の回転の角加速度$\ddot{\theta}$の関係を書け。

以下の設問では，円柱の中心軸まわりの慣性モーメントIを$\frac{1}{2}Ma^2$として解答せよ。

(4) 円柱の重心の加速度を求めよ。

(5) 摩擦力fの大きさを求めよ．また，摩擦力fの方向がx軸の正方向か負方向か答えよ。

(6) 円柱が滑らずに転がるための糸を引く力Pの条件を求めよ。

問題 4　設問すべてについて解答すること。

I　次の文章の空欄 (1) ～ (16) に適切な語句と式を入れて文章を完成させよ。太字の記号はベクトルであること，また符号に注意し，文中に与えられた記号のみを用い解答すること。

(a) 電気抵抗 R〔Ω〕の導体の両端に小さな電位差 $\Delta\phi$〔V〕を掛けると，導体には電流 $I =$ (1) 〔A〕が流れる。これは， (2) の法則とよばれる。電気抵抗 R は導線の長さ l〔m〕に比例し，断面積 S〔m^2〕に反比例するため，比例係数 ρ を用い，$R =$ (3) と表される。ρ〔Ω· m〕は抵抗率とよばれ，素材や温度に依存する物理量である。また，抵抗率の逆数 $\sigma = \rho^{-1}$〔$\Omega^{-1}\cdot \mathrm{m}^{-1}$〕は電気伝導度とよばれ，導線をなす物質の電流の流れやすさを表す。単位面積あたりの電流（電流密度）は $\sigma, \Delta\phi, l$ を用い $i = I/S =$ (4) 〔$\mathrm{A/m^2}$〕と表される。電場の大きさを E〔V/m〕とすると，$i = \sigma E$ となる。一般に，電流密度と電場は方向を持つベクトル量である。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ での電流密度ベクトルは，$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と一般化できる。これが局所的な (2) の法則である。

(b) 電子の電気素量を e〔C〕，質量を m〔kg〕とし，ミクロな視点から自由電子の運動を考える。図 1 のように，2枚の平行な電極を x 軸に対して垂直に $x = 0$ と L〔m〕におき，小さな電位差 $\Delta\phi = \phi(L) - \phi(0)(> 0)$ をかける。ここで $\phi(x)$ は，位置 x における静電ポテンシャルである。時刻 $t = 0$ で自由電子が $x = 0$ の電極から x 方向に加速され $x = L$ の電極に衝突し止まった。このとき，2つの電極間 $0 < x < L$ では，自由電子に (5) 〔N〕の力がはたらく。よって，自由電子の運動方程式は，時刻 t の x 成分の速度 $v_x(t)$ を用い， (6) で与えられる。時刻 $t = 0$ で $v_x(0) = 0$ とし，微分方程式を解くと，$v_x(t) =$ (7) 〔m/s〕となる。自由電子が $x = L$ の電極に衝突する時刻 T は， (8) 〔s〕，衝突直前の速度は (9) 〔m/s〕となる。2つの電極間 $0 < x < L$ では自由電子は等加速度運動をするため，平均速度 $\overline{v_x}$ は， (10) 〔m/s〕となる。

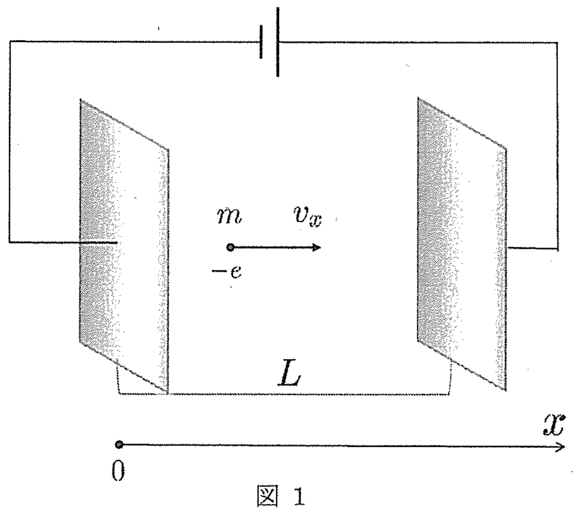

図 1

(c) 導体の代表である金属は原子からなる格子からできており，導体中の自由電子は真空中の(b)と同様に加速され，衝突により散乱され減速する過程が繰り返し生じていると仮定する。このとき，導体中の多数の自由電子の運動から金属の電気伝導度σがどのような量に依存するかを考える。図２のように，長さlの導体に電位差$\Delta\phi$をかけると，多数の自由電子がx軸の正の方向に加速され，衝突により減速される。この過程は，平均すると一種の摩擦による抵抗をうけるとみなせる。この摩擦力f_xが，質量mと平均速度$\langle v_x\rangle$に比例し，緩和時間τに反比例すると仮定すると，$f_x =$ $\boxed{(11)}$ 〔N〕となる。よって，自由電子の平均速度$\langle v_x(t)\rangle$についての運動方程式は $\boxed{(12)}$ となる。定常状態では時間依存性がないため，定常速度は $\boxed{(13)}$ 〔m/s〕となる。よって，自由電子密度をn〔$\mathrm{m^{-3}}$〕とすると，定常電流の電流密度のx成分は，$i_x =$ $\boxed{(14)}$ 〔$\mathrm{A/m^2}$〕となる。(14)は電流が電位差$\Delta\phi$に比例することを表している。つまり，導体中の多数の自由電子において加速と衝突による減速を考慮することで，(a)と同じ $\boxed{(2)}$ の法則を導いたことに相当する。よって，電気伝導度σはn, e, τ, mを用いて， $\boxed{(15)}$ 〔$\Omega^{-1}\cdot \mathrm{m^{-1}}$〕となる。定常電流が流れるとき，導体中の自由電子の全運動エネルギーは増加しない。一方，電場により自由電子が時間Δt〔s〕間に$\langle v_x\rangle\Delta t$変位したとき，単位体積あたり$\Delta W = ne\Delta\phi/l\cdot\langle v_x\rangle\Delta t$の仕事をし，単位時間に$J = \Delta W/\Delta t$の熱が外界に放出される。このとき，$J$は単位体積，単位時間あたりのジュール熱であり，$\sigma, \Delta\phi, l$を用いて， $\boxed{(16)}$ 〔J / ($\mathrm{m^3}$ s)〕と表される。

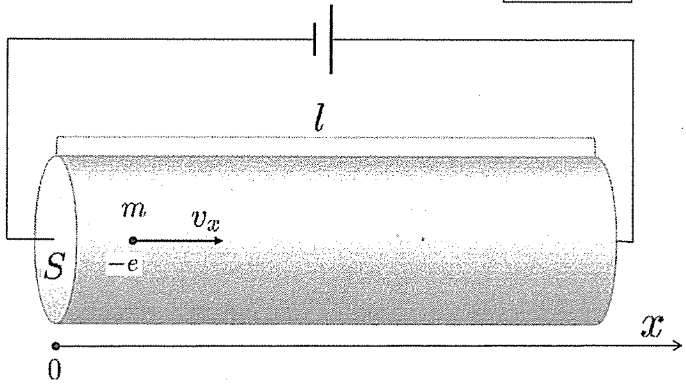

図２

II　I の結果を踏まえ，以下の設問に答えよ。

電子の質量を$m = 9.1\times10^{-31}$〔kg〕，電気素量を$e = 1.6\times10^{-19}$〔C〕とし，以下の問いに答えよ。

(a) 導体としてアルミニウムを考える。温度20°Cにおけるアルミニウムの電気伝導度は，$\sigma = 3.6\times10^{7}$〔$\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m^{-1}}$〕，自由電子密度は$n = 1.8\times10^{29}$〔$\mathrm{m^{-3}}$〕である。ある自由電子が衝突し，次に衝突するまでの平均時間〔s〕を求めよ。

(b) 導体中の自由電子を理想気体と仮定すると，室温における熱運動速度はおよそ10^5〔m/s〕である。このとき，自由電子が移動する平均距離（平均自由行程）が見積もれる。この移動距離は，アルミニウム結晶の最隣接原子間距離2.86Åに比べ，どの程度の大きさか。選択肢１～３より選べ。