2022年度（令和4年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系プログラム　応用物理）

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は，1ページから11ページまであります。解答用紙は，4枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。
3. 下記表の問題を全て解答してください。<u>1題につき解答用紙1枚を使用して</u>解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
11	基礎物理数学
15	電磁気学
16	統計物理学
17	量子物理学

4. 監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム，分野及び受験番号を4枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。
5. 計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。
6. 解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。
7. 机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。
8. コンパス及び定規等は，使用できません。
9. 時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。
10. スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。
11. 試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。
12. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 11　基礎物理数学　設問全てについて解答すること。設問Ⅰの解答を解答用紙のおもて面に，設問ⅡとⅢの解答を解答用紙のうら面にそれぞれ記入すること。また，最終的な解答結果には下線を用いて明記すること。

Ⅰ　次の（1）～（3）の問いについて答えよ。解答は，解答用紙のおもて面に記入すること。

（1）　行列式を利用して図1a，図1bの平行四辺形の面積および図1cの平行六面体の体積を求めよ。

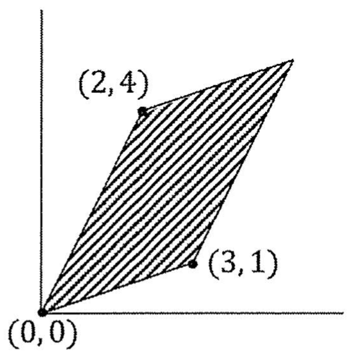


図1a

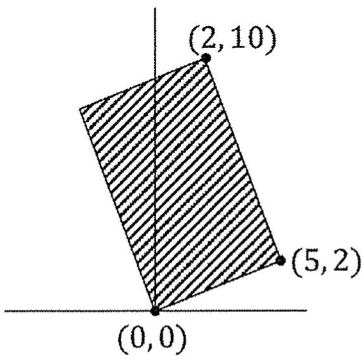


図1b

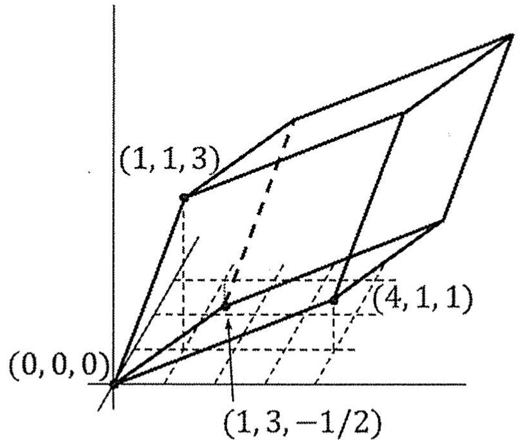


図1c

（2）$\boldsymbol{A} = (-3, 2, -6)$，$\boldsymbol{B} = (-1, 4, 3)$とする。

(2a)　$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$を求めよ。

(2b)　$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$に垂直な単位ベクトルを求めよ。

（3） 図２に体心立方格子（BCC格子）の単位格子を示す。格子定数はaとする。図中のベクトル$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$はBCC格子の基本並進ベクトルである。

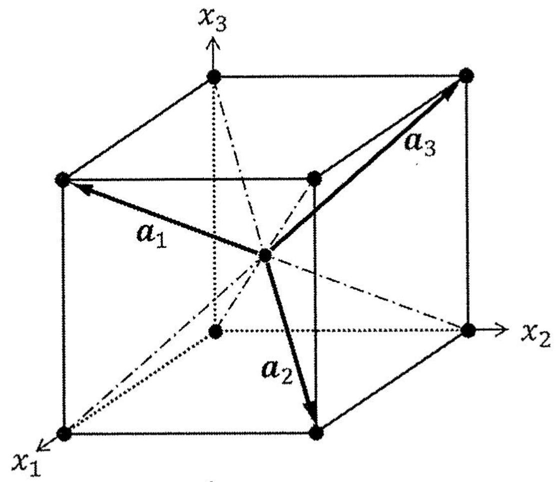


図２

（3a） 格子定数aを用いて基本並進ベクトル$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$をそれぞれ(x_1, x_2, x_3)の形で表せ。

（3b） 基本並進ベクトルを稜線とする平行六面体を基本単位格子と呼ぶ。BCC格子の基本単位格子の体積を求めよ。計算過程を示すこと。

（3c） 物性物理では結晶構造の解析やバンド計算等でしばしば逆格子を用いる。逆格子の定義式は以下の通りである。

$$\boldsymbol{b}_1 = 2\pi \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)} \qquad \boldsymbol{b}_2 = 2\pi \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)} \qquad \boldsymbol{b}_3 = 2\pi \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)}$$

BCCの逆格子$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$をそれぞれ(x_1, x_2, x_3)の形で表せ。

以下の設問Ⅱ，Ⅲの解答は，解答用紙のうら面に記入すること。

Ⅱ　次の（1）～（3）に示すベクトル$\boldsymbol{V}$の発散$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}$を求めよ。ただし微分演算子$\boldsymbol{\nabla}$（ナブラ）は

$$\boldsymbol{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

で定義され，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$はデカルト座標系における正規直交基底ベクトルである。また問題文中のベクトル $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ である。

（1） $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{r}$

（2） $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$ （ただし$|\boldsymbol{r}|=0$を除く）

（3） $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{r}\times(z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r})$

Ⅲ　次の（1），（2）の問いについて答えよ。

（1） 次の1階常微分方程式

$$\frac{df(t)}{dt}+\alpha f(t)=\exp(-\beta t),\qquad f(t=0)=0\qquad\cdot\cdot\cdot\quad ①$$

の解を求める。ここで$\alpha,\beta(\neq\alpha)$はある定数である。以下の設問に答えよ。

(1a) $f(t)=g(t)\exp(-\alpha t)$と置いて，①式を$g(t)$に対する微分方程式に書き換えよ。

(1b) 微分方程式①の解を求めよ。

（2） 次の連立微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt}=v(t),$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=-v(t)+\alpha x(t)$$

の解を求める。ここでαはある定数とし，初期条件は$x(t=0)=1$，$v(t=0)=0$で与えられる。以下の設問に答えよ。

(2a) $\alpha=2$のとき，微分方程式の解$x(t)$を求めよ。

(2b) $\alpha=-\frac{1}{4}$のとき，微分方程式の解$x(t)$を求めよ。

問題 15　電磁気学　設問すべてについて解答すること。

I　次の（1）～（7）の問いについて答えよ。

図 1 に示すように，2 つの円形状極板(半径 a)からなる平行板コンデンサー(電気容量 C)を充電したのち，時刻 $t=0$ で回路のスイッチを入れて放電させる。極板間において，中心軸から距離 r ($r \leq a$) にある点 P(円周上の点)を考える。ただし，極板は十分に広く，極板間の電場は一様に生じるとみなしてよいものとする。時刻 t ($t \geq 0$) に蓄えられている正の電荷を $Q(t)$ とし，正極から負極に向かう導線中の電流および極板間の変位電流の向きを正とすると，導線を流れる電流は $-\mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t$ となる。真空の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 とする。

（1）充電時にコンデンサーに蓄えられたエネルギーを $Q(0)$を用いて答えよ。

（2）時刻 t における極板間での電場の大きさ $E(t)$を $Q(t)$を用いて答えよ。

（3）時刻 t における極板間の変位電流<u>密度</u>の大きさ $i_\mathrm{d}(t)$を $\mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t$ を用いて答えよ。ただし，極板間の電場と変位電流の向きが反対であることに注意せよ。

（4）点 P における磁束密度の大きさ $B(r, t)$を $\mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t$ を用いて答えよ。

（5）点 P におけるポインティングベクトルの向きを図 2 の(a)～(d)から選べ。

（6）点 P におけるポインティングベクトルの大きさを $\mathrm{d}\{Q(t)\}^2/\mathrm{d}t$ を用いて答えよ。

（7）放電で $Q(t)=0$ になるまでにコンデンサーから流出するエネルギーを $Q(0)$を用いて答えよ。

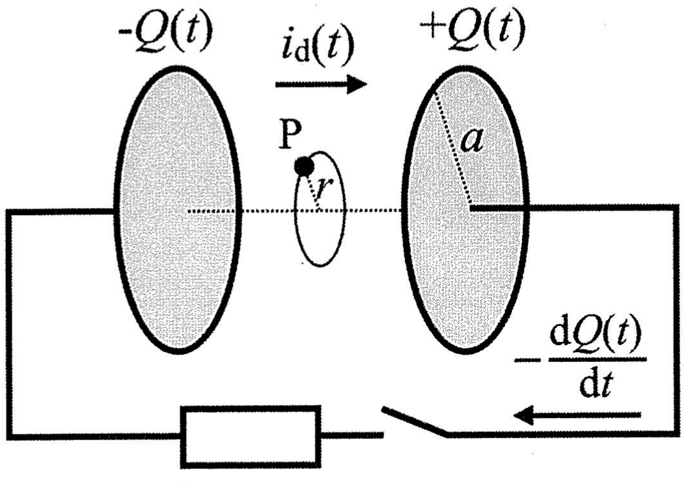


図 1

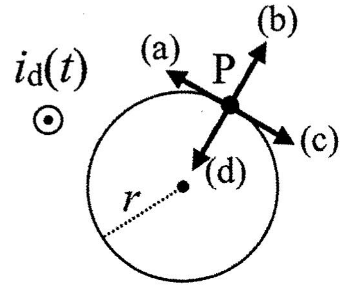


図 2

Ⅱ　次の（1）～（5）の問いについて答えよ。

図3に示すように，cd 間距離が無視できるほど小さく，一辺の長さ a の正方形とみなせるコイルを考える。コイルを磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の一様な磁場 ($B=|\boldsymbol{B}|$) の中におき，磁場に垂直な軸の周りに一定の角速度 ω で回転させる。回転軸は ps 及び qr の中点を通る。時刻 $t=0$ ではコイルの面の法線が磁場と平行であり，図3は時刻 $t=0$ 直後の様子を示している。
必要に応じて以下の公式を用いてもよい。

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,　$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

cd 間がつながっていない場合を考える。

（1）コイルの中の電子を考える。pq 内の一個の電子（電荷 $-e$）について，pq 方向に作用するローレンツ力 $F(t)$ を求めよ。ただし，p から q に向かう方向を正とする。

（2）ローレンツ力によって pq 間に生じる起電力 $V(t)$ を求めよ。答えに $F(t)$ を用いてはいけない。

（3）コイルを貫く磁束 $\Phi(t)$ を求めよ。

（4）コイル内に生じる誘導起電力 $\phi_{\mathrm{em}}(t)$ を求めよ。答えに $V(t)$ と $\Phi(t)$ を用いてはいけない。

cd 間が短絡している場合を考える。ただし，誘導電流が作る磁場は無視してよい。

（5）コイルの抵抗が R のとき，コイルが一回転する周期 $2\pi/\omega$ の間に発生するジュール熱 J を求めよ。

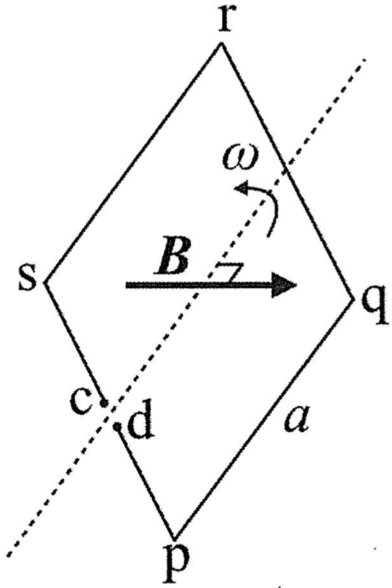


図3

問題 16　統計物理学　設問すべてについて解答すること。

I　成分 a の振動子（固有角振動数ω_{a}）が$\frac{N}{2}$個，成分 b の振動子（固有角振動数ω_{b}）が$\frac{N}{2}$個から成る対象系が，材料表面に吸着し絶対温度Tで熱平衡状態にある。各振動子は，量子力学に従って１次元での調和振動をしており，とりうる内部エネルギーは $e_{\mathrm{a}}(i) = \hbar\omega_{\mathrm{a}}\left(i + \frac{1}{2}\right)$ および $e_{\mathrm{b}}(i) = \hbar\omega_{\mathrm{b}}\left(i + \frac{1}{2}\right)$，ここで $i = \{0,1,2,\dots\}$ とする。振動子の吸着エネルギー，振動子間の相互作用エネルギーは，共に無視してよい。次の（１）～（４）の問いについて答えよ。なお，プランク定数を2πで割った定数は$\hbar$，ボルツマン定数はk_{B}，$\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$とする。公式 $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$を使って良い（$|x| < 1$）。

（１）ある温度T_0より低いTでは，振動子群は材料表面の限られた範囲に隙間なく吸着し，各振動子の吸着場所は時と共に変化しない。最初に，成分 a の振動子１個に着目し，この振動子１個の分配関数z_{a}を求めよ。また，成分 a の振動子１個について，ヘルムホルツの自由エネルギーf_{a}を求めよ。次に，対象系全体について，ヘルムホルツの自由エネルギー F，エントロピー S，熱容量 C を求めよ。

（２）T_0より少し高いTでは，振動子群は隙間なく吸着しているものの，各振動子の吸着場所は時と共にランダムに入れ替わる。この状態での対象系全体のSとCは，（１）で答えたSとCから，どのように異なるか説明せよ。

（３）T_0より少し低いTから，T_0より少し高いTまで昇温する過程で，Tに依存してCはどのように変化するか予想せよ。

（４）TをT_1より高くすると$(T_1 > T_0)$，各振動子がランダムに吸着場所を変えるだけでなく，計N個の振動子の吸着範囲が材料表面で広がり，振動子間に隙間（つまり吸着していない場所=無吸着場所）が生じるようになる。材料表面の無吸着場所が$\frac{N}{2}$個存在すると仮定する場合，対象系全体のSは，（１）で答えたSから，どのように異なるか説明せよ。

II　スピン量子数$\frac{1}{2}$で質量mの自由フェルミ粒子N個からなる系（$N \gg 1$）が，周期境界条件下で，x, y, z方向の長さがそれぞれA, B, Cの空間（体積ABC）に存在し，絶対温度Tで熱平衡状態にある。次の（１）～（５）の問いについて答えよ。なお，プランク定数を2πで割った定数は$\hbar$，ボルツマン定数はk_{B}とする。

（１）粒子を波で表す際の波数ベクトル $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ の一般形を，整数a, b, cを使って表せ。

（２）エネルギー $\varepsilon = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$である粒子の数 $f(\varepsilon)$を，化学ポテンシャルμを導入して表せ。

（３）フェルミエネルギー ε_{F}を計算せよ。

（４）$T = 0$でのμを表せ。

（５）$T \gg \varepsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}$では μの符号がどのようになるか説明せよ。

問題 17　量子物理学　設問すべてについて解答すること。

I　次の (1)〜(5) の問いに答えよ。

質量mの粒子が１次元方向（これをx方向とする）のみに運動し，無限に高い井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0 \text{ において} \\ 0 & 0\le x\le a \text{ において} \\ \infty & x>a \text{ において}\end{cases}$$

内に閉じ込められているとする。ここで，xは１次元座標，aは正の定数である。プランク定数をh，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$とする。必要ならば，解答には以下の公式を用いて良い。

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx=\frac{a}{2},$$

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx=\frac{a}{2},$$

$$\int_0^a x\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\int_0^a x\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\int_0^a x\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx=-\frac{8a^2}{9\pi^2},$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx=\frac{a}{4},$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx=\frac{a}{4},$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx=\frac{2a}{3\pi},$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} x\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx=\frac{\left(\pi^2+4\right)a^2}{16\pi^2},$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} x\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx=\left(\frac{a}{4}\right)^2,$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} x\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx=\frac{\left(3\pi-4\right)a^2}{9\pi^2}$$

（１）規格化された基底状態の波動関数$\phi_0(x)$，基底状態のエネルギー固有値E_0，規格化された第一励起状態（基底状態の次にエネルギー固有値が小さいエネルギー固有状態）の波動関数$\phi_1(x)$，第一励起状態のエネルギー固有値E_1，を求めよ。ただし，$\phi_0(x)$および$\phi_1(x)$は実数で，$\phi_0\left(\dfrac{a}{4}\right)>0$，$\phi_1\left(\dfrac{a}{4}\right)>0$となるように位相を選ぶこと。

（２）$\phi_0(x)$および$\phi_1(x)$の重ね合わせ，

$$\psi_+(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\phi_0(x)+\phi_1(x)\right\}$$

$$\psi_-(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\phi_0(x)-\phi_1(x)\right\}$$

を考える。$\psi_+(x)$および$\psi_-(x)$が規格化されていること，$\langle\psi_+|\psi_-\rangle=0$を示せ。

（3）$\psi_+(x)$ によるエネルギーの期待値 $\overline{E}_+$ および $\psi_-(x)$ によるエネルギーの期待値 $\overline{E}_-$ を，E_0 および E_1 を用いて表せ。

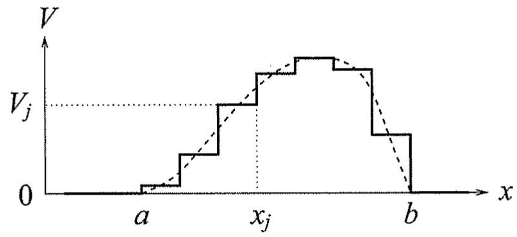
（4）$\psi_+(x)$ による位置 x の期待値 $\overline{x}_+$，および $\psi_-(x)$ による位置 x の期待値 $\overline{x}_-$ を求めよ。

（5）状態 $\psi_+(x)$ の粒子が範囲 $0 \leq x \leq \dfrac{a}{2}$ に存在する確率 P_+，および状態 $\psi_-(x)$ の粒子が範囲 $0 \leq x \leq \dfrac{a}{2}$ に存在する確率 P_- を求めよ。

II x 軸に沿って運動する質量 m の粒子の量子力学を考える。$a<x<b$ の領域に有限のポテンシャル $V(x)$ が分布している。いま，ポテンシャル領域を $n+1$ 個の点 x_j $(a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$ により n 個の微小領域に分割し，各領域で一定値をとる下図のような階段関数

$$\widetilde{V}(x)=\begin{cases}0 & \text{for} \quad x\le a,\ x>b \\ V_j & \text{for} \quad x_{j-1}<x\le x_j \quad (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

でポテンシャル $V(x)$ を置き換える。ここで定数 V_j は $x=\dfrac{x_{j-1}+x_j}{2}$ におけるポテンシャル $V(x)$ の値とする。分割幅が十分に小さければ，この階段型ポテンシャルに対するシュレーディンガー方程式の解は元の連続なポテンシャルに対する解のよい近似となる。プランク定数を h, $\hbar=h/2\pi$ として以下の設問 (1)~(7) に答えよ。なお，問題文中で行列を太字で表記しているが，答案には太字を用いる必要はない。



(1) エネルギー $E>0$ の定常状態を考える。任意の x に対して $E>V(x)$ であるとき，領域 $x_{j-1}<x\le x_j$ におけるシュレーディンガー方程式の二つの独立な解は e^{ik_jx}, e^{-ik_jx} と表される。正の定数 k_j $(j=1,\cdots,n)$ を E, V_j, m, $\hbar$ を用いて表せ。

(2) このとき各領域におけるシュレーディンガー方程式の解は，上問 (1) と同様の独立な解の重ね合わせにより一般に

$$\phi(x)=\begin{cases}A_0e^{ik_0x}+B_0e^{-ik_0x} & \text{for} \quad x\le a \\ A_je^{ik_jx}+B_je^{-ik_jx} & \text{for} \quad x_{j-1}<x\le x_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \\ A_{n+1}e^{ik_{n+1}x}+B_{n+1}e^{-ik_{n+1}x} & \text{for} \quad x>b, \quad k_{n+1}=k_0\end{cases}$$

と表される。ここで係数 A_j, B_j $(j=0,1,\cdots,n+1)$ は x によらない複素定数である。分割点 $x=x_j$ $(j=0,1,\cdots,n)$ でこれらの係数が満たすべき条件を記せ。

(3) 上問 (2) の条件より，各分割点 $x=x_j$ の左右の解の係数間に，$\mathbf{W}_j$ を (2×2) 行列として

$$\begin{pmatrix}A_{j+1}e^{ik_{j+1}x_j} \\ B_{j+1}e^{-ik_{j+1}x_j}\end{pmatrix}=\mathbf{W}_j\begin{pmatrix}A_je^{ik_jx_j} \\ B_je^{-ik_jx_j}\end{pmatrix} \quad (j=0,1,\cdots,n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の関係が成り立つ。この行列 $\mathbf{W}_j$ を k_j, k_{j+1} を用いて表せ。

(4) 式①を書き直すと，係数間の関係は

$$\begin{pmatrix}A_{j+1} \\ B_{j+1}\end{pmatrix}=\mathbf{M}_j\begin{pmatrix}A_j \\ B_j\end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_j=\begin{pmatrix}e^{-ik_{j+1}x_j} & 0 \\ 0 & e^{ik_{j+1}x_j}\end{pmatrix}\mathbf{W}_j\begin{pmatrix}e^{ik_jx_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_jx_j}\end{pmatrix}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

と表され，両端における解の係数間に，$\mathbf{P}$ を (2×2) 行列として

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

の関係が成り立つ。この行列 $\mathbf{P}$ を式②の行列 $\mathbf{M}_j$ $(j=0,1,\cdots,n)$ を用いて表せ。

(5) 行列 $\mathbf{P}$ の行列式が 1 であることを示せ。

(6) 粒子が $x<a$ の領域から x の正の向きに入射するとき，反射波の複素振幅 B_0 および透過波の複素振幅 A_{n+1} の入射波の複素振幅 A_0 に対する比を $R=\dfrac{B_0}{A_0}$ および $T=\dfrac{A_{n+1}}{A_0}$ とする。行列 $\mathbf{P}$ の成分を

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

として，R と T をそれぞれ行列 $\mathbf{P}$ の成分を用いて表せ。

(7) 一般に $P_{11}=P_{22}^*$, $P_{12}=P_{21}^*$ が成り立つことが示される。これらの関係式を用いて，上問 (6) の R, T の間に成り立つ確率保存の式を示せ。