2023年度（令和5年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系プログラム　応用物理）

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．問題は，１ページから８ページまであります。解答用紙は，４枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3．下記表の問題を全て解答してください。**１題につき解答用紙１枚を使用して**解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
15	基礎物理数学
16	電磁気学
17	統計物理学
18	量子物理学

4．監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム，分野及び受験番号を４枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5．計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6．解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7．机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8．コンパス及び定規等は，使用できません。

9．時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10．スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11．試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12．試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 15　基礎物理数学　設問すべてについて解答すること。設問Ⅰ, Ⅱの解答を解答用紙の表面に, 設問Ⅲの解答を解答用紙の裏面にそれぞれ記入すること。また, 最終的な解答結果には下線を引いて明記すること。

Ⅰ　デカルト座標系(x_1, x_2, x_3)におけるベクトル場$\boldsymbol{u} = \left(u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)\right)$が

$$u_1 = 2x_1 + x_2, \qquad u_2 = -x_1 - x_2 - x_3, \qquad u_3 = -2x_1 + x_2 + 2x_3,$$

で与えられるとき, 次の（1）～（3）の問いについて答えよ。

（1）ベクトル場$\boldsymbol{u}$の発散（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$）の値を求めよ。

（2）ベクトル場$\boldsymbol{u}$の回転（$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$）の各成分の値を求めよ。

（3）3 次正方行列Sのi行j列成分が

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (i, j = 1,2,3)$$

で与えられるとき, 行列Sの固有値$\lambda_i\,(i = 1,2,3)$, および固有ベクトル$\boldsymbol{e}_i\,(i = 1,2,3)$をそれぞれ求めよ。ただし固有ベクトルは大きさ 1 に規格化せよ。

Ⅱ　次の微分方程式の解を求めよ。ただし解は括弧内の条件を満たすものとする。

（1）$\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 \qquad \left(x = 0 \text{ で} y = 0. \quad -1 < y < 1\right)$

（2）$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = \sin x \qquad \left(x = 0 \text{ で} y = \frac{dy}{dx} = 0\right)$

Ⅲ　次の（１）～（２）の問いについて答えよ。ただし，$k>0$とする。

（１）フーリエ級数に関する以下の設問に答えよ。

（１a）次の関数$f_1(t)$のグラフを描き，$f_1(t)$が「偶関数」か「奇関数」か答えよ。
グラフは横軸をt，縦軸を$f_1(t)$とし，少なくとも１周期分を描け。

$$f_1(t)=\begin{cases}-1 & (-2k<t<0)\\ \ \ 0 & (t=0,\ 2k)\\ \ \ 1 & (0<t<2k)\end{cases}\quad,\ f_1(t)=f_1(t+4k)$$

（１b）関数$f_1(t)$のフーリエ級数を求めよ。答えは，三角関数を用いて示せ。
また，角周波数$n\pi/2k$の成分の振幅を求めよ。ただし，$n=1,2,3,\cdots$とする。

（２）フーリエ変換に関する以下の設問に答えよ。

（２a）関数$f(t)$のフーリエ変換を$F(\omega)$とする。フーリエ逆変換が次式で与えられるとき，
フーリエ変換$F(\omega)$を，$f(t)$を用いて示せ。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

（２b）（２a）で示したフーリエ変換を用いて，次の関数$f_2(t)$のフーリエ変換$F_2(\omega)$を求めよ。

$$f_2(t)=\begin{cases}1 & (|t|\leq k)\\ 0 & (|t|>k)\end{cases}$$

（２c）（２b）の解答を用いて，次の関数$f_3(t)$のフーリエ変換$F_3(\omega)$を求めよ。

$$f_3(t)=\frac{\sin t}{t}$$

問題16　電磁気学　設問すべてについて解答すること。

I　以下の (1)〜(5) の問いに答えよ。

鏡像法を用いて，接地した導体球と点電荷 (電荷 q) との間の引力を考えよう。図 1 のように導体球の中心から点電荷に向かう直線を x 軸とし，導体球の中心を原点にとる。導体球の半径を d，点 A にある点電荷の x 座標を $a\,(a>d)$ とする。

導体球の中心から点電荷の向きに距離 $b\,(d>b>0)$ だけ離れた x 軸上の点を B とし，そこに置いた鏡像電荷 (電荷 q') を考える。球面上の任意の点 P に対して，点 B および A までの距離を，それぞれ r_1 と r_2 とする。点 B は，アポロニウスの定理より，r_1 と r_2 の比が一定になるように選ばれている。

以下では，真空の誘電率を ε_0 とする。

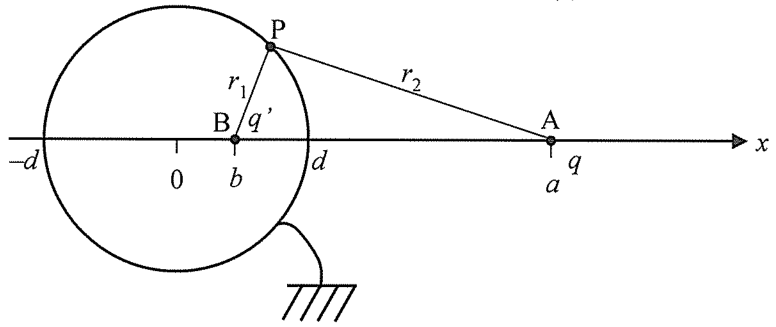


図 1

(1)　点電荷 q と鏡像電荷 q' が点 P につくる静電ポテンシャル ϕ を書け。ただし，原点から無限遠のポテンシャルをゼロとする。

(2)　導体球の接地の条件 ($\phi=0$) から，距離の比 $r_2/r_1\,(>0)$ を，q と q' を用いて表せ。

(3)　点 P が x 軸上にある 2 つの場合を考えて，距離 b を，a と d を用いて表せ。

(4)　問 (2) と (3) の結果を利用して，q' を，a, d, q を用いて表せ。

(5)　点電荷と導体球との間の引力の大きさを求めよ。ただし，答えに b と q' を用いてはいけない。

II　以下の (1)〜(6) の問いに答えよ。

電荷密度と電流密度がゼロであるような空間の電磁場を自由電磁場と呼ぶ。自由電磁場におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ とスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ について考えよう。ここで，$\boldsymbol{r}$ はデカルト座標で表される位置ベクトル，t は時間である。一般に，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \end{cases}$$

ここで，∇ はナブラベクトルである。以下では，複素関数で与えられるポテンシャルを考えるが，それらの関数の実数部分だけが意味があるとする。計算の途中や解答を示すときは，複素関数のままで構わない。必要に応じて解答に内積$\cdot$と外積$\times$の記号を用いてもよい。虚数単位を i とする。

(1)　$\boldsymbol{k}$ を成分が実数の定ベクトルとするとき，$\nabla \exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)$ を計算せよ。

(2)　$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{A}_0$ を成分が実数の定ベクトルとするとき，$\nabla\times\left[\boldsymbol{A}_0 \exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]$ を計算せよ。

ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ を以下のように与える。

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right] \\ \phi = \phi_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right] \end{cases}$$

ここで，$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{k}$ は成分が実数の定ベクトル，ϕ_0, ω は実定数とする。

(3)　電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めよ。

(4)　磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めよ。

次に，スカラーポテンシャル ϕ をゼロにし，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を以下のように与える。

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{A}_0 - \dfrac{\phi_0}{\omega}\boldsymbol{k}\right)\exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right] \\ \phi = 0 \end{cases}$$

ここで，$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{k}$ は成分が実数の定ベクトル，ϕ_0, ω は実定数とする。

(5)　電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めよ。

(6)　磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めよ。

自由電磁場では，スカラーポテンシャルを常にゼロにしても，ベクトルポテンシャルをうまく選ぶと電場と磁場 (磁束密度) を変化させないことが出来る。

問題 17　統計物理学　設問すべてについて解答すること。

I　対象とする系は，計I個の状態をとることができ，状態iのエネルギーはE_iである（$i = \{1,2,\dots,I\}$）。この系は，温度Tの熱浴に接しており，平衡状態にある。次の（１）～（６）の問いについて答えよ。なお，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$，$k_{\mathrm{B}}$はボルツマン定数とする。

（１）　系の分配関数Zを，E_iを用いて書け。

（２）　ヘルムホルツの自由エネルギー Fを，Zを用いて書け。さらに，エントロピー Sを，Fに対する偏微分として書け。

（３）　状態iが実現される確率p_iを，E_iとZを用いて書け。

（４）　上記（２）と（３）の解答から，Sはp_iを使って以下と書けることを示せ。

$$S = -k_{\mathrm{B}} \sum_{i=1}^{I} p_i \ln p_i$$

（５）　確率の和 $\sum_{i=1}^{I} p_i = 1$とする条件付きで，$S = -k_{\mathrm{B}} \sum_{i=1}^{I} p_i \ln p_i$を極大にする確率$\{p_i\}$を，ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ。導出過程も書くこと。

（６）　平均エネルギー$\sum_{i=1}^{I} p_i E_i$を一定に保ち，確率の和$\sum_{i=1}^{I} p_i = 1$とする両条件付きで，$S = -k_{\mathrm{B}} \sum_{i=1}^{I} p_i \ln p_i$を極大にする確率$\{p_i\}$はカノニカル分布であることを，ラグランジュの未定乗数法を用いて示せ。導出過程も書くこと。

II　スピン量子数sの自由量子粒子N個の系が，温度Tで，周期境界条件での一辺Lの立方体（体積$V = L^3$）内に存在している。次の（１）～（４）の問いについて答えよ。なお，プランク定数を2πで割った定数は$\hbar$，ボルツマン定数はk_{B}とする。

（１）　粒子の量子状態を特徴付ける波数ベクトル$\vec{k}$に関して，各成分の最小間隔Δk_x，Δk_y，Δk_zを，Lを用いて書け。

（２）　$s = 0$であり，$T = 0$とする。粒子がもつ波数の大きさkを求めよ。

（３）　上記（１）の解答を用い，Lが大変大きいとして
$A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z =$(とり得る$\vec{k}$の個数)と書く際の$A$を求めよ。

（４）　$s = \frac{1}{2}$であり，$T = 0$とする。粒子がもつ波数の大きさkに関して，その最大値k_{F}を求めよ。さらにk^2の全粒子での平均$\langle k^2 \rangle$を，k_{F}を用いて書け。Lは大変大きいとして良い。

問題 18　量子物理学　設問すべてについて解答すること。

Ｉ　次の（１）～（５）の問いについて答えよ。

１次元調和振動子を考える。１次元方向を x 方向とする。質量 m の粒子がポテンシャル $\frac{1}{2}Kx^2$（K は正の定数）の内に束縛されている。プランク定数を h，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とする。必要ならば，解答に以下の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

規格化された波動関数

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}\pi^{\frac{1}{4}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

を考える。ここで a は正の定数である。

（１）$\psi(x)$ が規格化されていることを示せ。

（２）$\psi(x)$ による，位置演算子 $\hat{x}$ の期待値，$\hat{x}^2$ の期待値，運動量演算子の x 成分 $\hat{p}_x$ の期待値，$\hat{p}_x^2$ の期待値を求めよ。

（３）（２）で求めた期待値を用いて，$\psi(x)$ が位置と運動量の不確定性関係を満たすことを示せ。

（４）粒子が範囲 $-a \le x \le a$ に存在する確率を，以下の式で定義される誤差関数

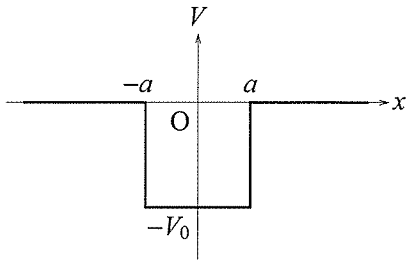
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt$$

を用いて表せ。

正の実数 a を変化させた場合を考える。

（５）エネルギー期待値が最小となるときの a を求めよ。また，このときのエネルギー期待値を求めよ。

II　右図のような幅 $2a$, 深さ V_0 の 1 次元井戸型ポテンシャル



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 & -a \le x \le a \end{cases}$$

による質量 m の粒子の束縛状態を考える。プランク定数を 2π で割った定数を $\hbar$ として以下の (1) ～ (4) の問に答えよ。

(1) ポテンシャル $V(x)$ は原点について対称であるから，束縛状態のエネルギー固有関数は位置 x の偶関数 $\psi_+(-x) = \psi_+(x)$ または奇関数 $\psi_-(-x) = -\psi_-(x)$ のいずれかであり，偶関数の固有関数は

$$\psi_+(x) = \begin{cases} Ce^{Kx} & x < -a \\ A\cos kx & -a \le x \le a \\ Ce^{-Kx} & x > a \end{cases} \qquad (A, C, k, K \text{ は定数})$$

奇関数の固有関数は

$$\psi_-(x) = \begin{cases} -C'e^{Kx} & x < -a \\ A'\sin kx & -a \le x \le a \\ C'e^{-Kx} & x > a \end{cases} \qquad (A', C', k, K \text{ は定数})$$

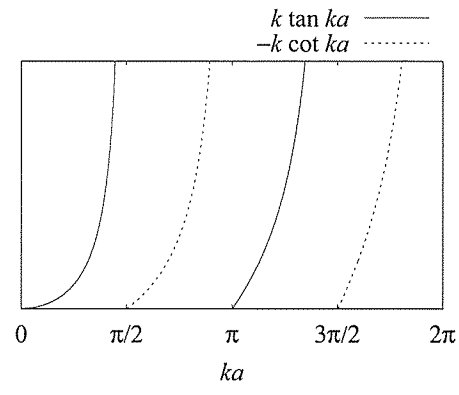
と書ける。エネルギー固有値を $-B \quad (0 < B < V_0)$ として，正の定数 k および K をそれぞれ B を用いて表せ。

(2) $x = \pm a$ での波動関数の接続条件から，固有状態が満たすべき条件は固有関数 $\psi_\pm(x)$ に対し，共通の関数 $F(k)$ を用いてそれぞれ

$$\begin{cases} k\tan ka = F(k) & (\text{for } \psi_+) \\ -k\cot ka = F(k) & (\text{for } \psi_-) \end{cases} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

の形で表される。$k_0 = \dfrac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$ として，関数 $F(k)$ を k および k_0 のみを用いて表せ。

(3) この系は，上問 (2) の条件式の左辺と右辺のグラフの交点によって与えられる有限個の束縛状態をもつ。右の図は横軸に ka をとって縦軸に $k\tan ka$ および $-k\cot ka$ をプロットしたグラフである。$F(k)$ がどのようなグラフになるかを考えて，この粒子の束縛状態がちょうど n 個 $(n \ge 1)$ 存在するようなポテンシャルのパラメータ V_0, a の条件（不等式）を記せ。解答には V_0 のかわりに k_0 を用いてもよい。



(4) $V_0 = \dfrac{\lambda}{2a}$ と置き，λ を正の有限一定値に保ったままで $a \to 0$ $(V_0 \to \infty)$ の極限をとる。この極限において，束縛状態がただ一つ存在することを示し，そのエネルギー固有値を λ を用いて表せ。必要であれば $|\theta| \ll 1$ のとき $\tan\theta \simeq \theta$ の近似を用いよ。