2024 年度（令和 6 年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系プログラム　応用物理）

注　意　事　項

1.　試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2.　問題は，１ページから９ページまであります。解答用紙は，４枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3.　下記表の問題を全て解答してください。**１題につき解答用紙１枚を使用して**解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
15	基礎物理数学
16	電磁気学
17	統計物理学
18	量子物理学

4.　監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム，分野及び受験番号を４枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5.　計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6.　解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7.　机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8.　コンパス及び定規等は，使用できません。

9.　時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10.　スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11.　試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12.　試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 15　基礎物理数学　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　３次元縦ベクトル $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_3$ は以下で定義される。

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

次の（１）～（３）の問いについて答えよ。

（１）$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ を求めよ。

（２）$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ を求めよ。

（３）３次正方行列 A を $A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ で定義する。

(3a) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3)$ を求めよ。

(3b) (3a) で求めた固有値 $\lambda_i\ (i = 1, 2, 3)$ に対応する固有ベクトル $\vec{e}_i\ (i = 1, 2, 3)$ を求めよ。ただし固有ベクトルは大きさ１に規格化せよ。

Ⅱ　以下の連立微分方程式を考える。

$$\frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} = -4u_1(t) + u_2(t), \qquad u_1(t=0) = 1, \quad \frac{du_1}{dt}(t=0) = 0$$

$$\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = u_1(t) - 3u_2(t) + u_3(t), \qquad u_2(t=0) = 0, \quad \frac{du_2}{dt}(t=0) = 1$$

$$\frac{d^2 u_3(t)}{dt^2} = u_2(t) - 4u_3(t), \qquad u_3(t=0) = -1, \quad \frac{du_3}{dt}(t=0) = 0$$

ただし u_1，u_2，u_3 はそれぞれ t の関数である。次の（１）～（３）の問いについて答えよ。

（１）$X(t) = u_1(t) - u_3(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。またその解 $X(t)$ を求めよ。

（２）$Y(t) = u_1(t) - u_2(t) + u_3(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。またその解 $Y(t)$ を求めよ。

（３）連立微分方程式の解 $u_1(t)$，$u_2(t)$，$u_3(t)$ を求めよ。

Ⅲ　次の（１）～（５）の問いについて答えよ。

（１）オイラーの公式から，$\cos t$を指数関数を用いて表せ。

ただし，虚数単位をi，自然対数の底をeとする。

（２）周期関数$e^{im\omega t}$と$e^{-in\omega t}$の積の積分$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{im\omega t}e^{-in\omega t}dt$を求めよ。

ただし，ωは角周波数，m，nは整数であり，$\omega > 0$とする。

（３）$f(t)$が周期$\frac{2\pi}{\omega}$の周期関数のとき，複素フーリエ係数c_nを用いて

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

と書ける。$f(t)$と$e^{-im\omega t}$の積の０から$\frac{2\pi}{\omega}$までの積分を求め，c_nを$f(t)$を用いて表せ。

（４）次の周期$\frac{\pi}{2}$の周期関数$f_1(t)$の複素フーリエ級数を求めよ。

$$f_1(t) = |\sin 2t|$$

（５）次の関数$f_2(t)$のフーリエ変換$F_2(\omega)$を求めよ。

$$f_2(t) = g(t)\cos t \qquad g(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

問題 16　電磁気学　設問すべてについて解答すること。

I　次の（1）～（5）の問いについて答えよ。

図 1 の断面図に示すように，真空中における平らな金属板と一酸化炭素分子の間に働く静電相互作用について検討したい。導体表面近傍の電気双極子をモデルとして考えることにする。

この相互作用は，図 2 のように，導体表面に垂直な断面に xy 座標をとって鏡像法を用いれば，鏡像電荷の組と電気双極子の相互作用に置き換えられる。電荷$-q, +q$ をもつ点電荷 Q_1, Q_2 が，互いに d だけ離れて位置し（q, d は正の定数），大きさ $\mu = qd$ の双極子モーメントをもっている。これらに対し，反対符号の電荷$+q, -q$ をもつ鏡像電荷 Q_3, Q_4 を表面に対して対称な位置におく。表面の位置は $y = a$ $(a > 0)$である。電荷 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 は全て xy 平面上にあり，その座標はそれぞれ $(0, 2a), (0, 2a + d), (0, 0), (0, -d)$である。真空の誘電率を$\varepsilon_0$，無限遠の静電ポテンシャルを 0 として，以下の問いに答えよ。

（1）鏡像電荷 Q_3 が xy 平面上の任意の点 $R(x, y)$につくる電場の大きさ E を求めよ。

（2）鏡像電荷 Q_3 と Q_4 が点 $R(x, y)$につくる静電ポテンシャルϕを求めよ。

（3）鏡像電荷 Q_3 と Q_4 がつくる静電ポテンシャルにより，点電荷 Q_1 がもつ静電エネルギーU_1 を求めよ。

（4）$d/a \ll 1$ のとき，鏡像電荷 Q_3 と Q_4 がつくる静電ポテンシャルにより，点電荷 Q_1, Q_2 がもつ静電エネルギーの和 U を，d/a に対する<u>2 次の近似</u>で求め，μ, a, ε_0 を用いて表せ（q, d を含まない形にして答えよ）。<u>2 次の近似式</u> $(1 + t)^{-1} \approx 1 - t + t^2$ $(|t| \ll 1)$ を利用してよい。

（5）（4）で求めた静電エネルギーU は a に依存する。つまり，図 1 に戻れば，分子がもつ静電エネルギーは金属板との距離に依存する。これを考慮して，分子は金属板に<u>引き寄せられる</u>のか<u>遠ざけられる</u>のか，簡潔な理由と共に答えよ。

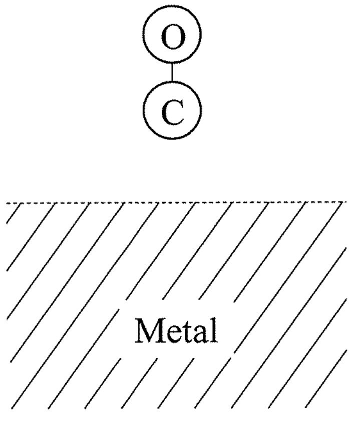

図 1

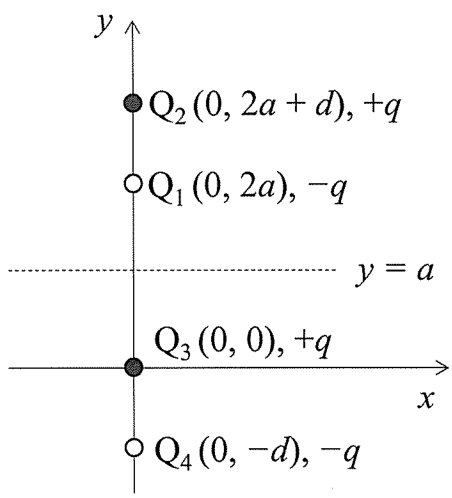

図 2

Ⅱ　次の（1）～（7）の問いについて答えよ。

四角形型の微小ループ回路は，電磁波（電波）を検出するアンテナとしての機能を持つ。以下では，磁場の変化により回路に生じる誘導起電力を考える。

図３のように，xy 平面上に，１辺の長さ h の正方形型のループ回路 ABCD を設置する。ここで，位置 x, 時刻 t における磁束密度が $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_0}\cos(kx - \omega t)$ と表される電磁波（平面波）を考える。ただし，$\boldsymbol{B_0} = (0, 0, B_0)$ で，k, ω, B_0 は正の定数とする（$kh < 2\pi$）。回路を含む x 軸上の各点における磁束密度は，$t = 0$ では図４のように表される。回路の導線の太さは無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

（1）この電磁波の波長を求めよ。

（2）時刻 $t = 0$ において，任意の点 $P(x, y, z)$ における磁束密度の x, y, z 成分 B_x, B_y, B_z を求めよ。

（3）時刻 $t = 0$ において，この回路を貫く磁束を求めよ。

（4）時刻 t でループ回路に発生する誘導起電力を求めよ。反時計回りを正とする。

次に，図５のように，ループ回路を辺 AD を軸として角度 θ ($0 < \theta < \pi/2$) だけ傾けた場合を考える。

（5）辺 AB 上の任意の点 E に対して，AE の長さを ℓ とする。時刻 t において，点 E における磁束密度の回路面に垂直な成分の大きさを，$B_0, k, \omega, \ell, t, \theta$ を用いて表せ。

（6）時刻 t でループ回路に発生する誘導起電力を求めよ。反時計回りを正とする。

（7）$kh \ll 1$ のとき，ループ回路に発生する誘導起電力の最大値を求めよ。
$\cos(kh\cos\theta) \approx 1$, $\sin(kh\cos\theta) \approx kh\cos\theta$ を利用してよい。

一般に，微小ループアンテナでは回路面が電磁波の伝播方向と平行になる時に感度が最大となる。

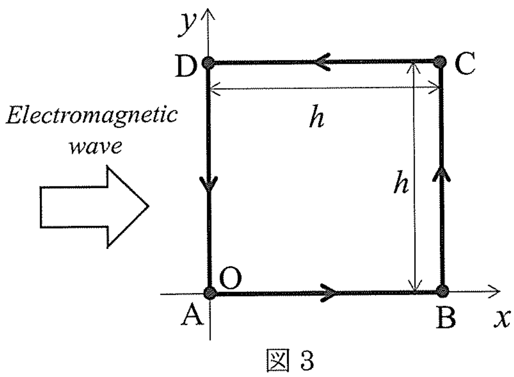

図３

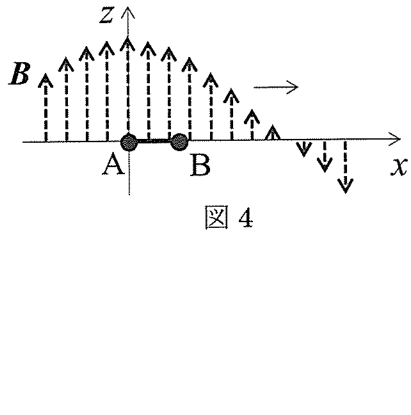

図４

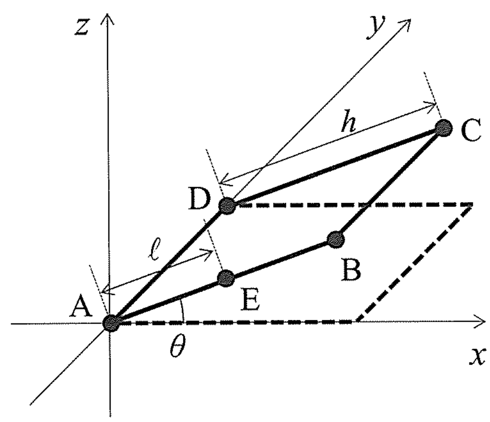

図５

問題 17　統計物理学　設問すべてについて解答すること。

I　基板材料上に堆積している分子N個からなる系が，体積Vで絶対温度Tの熱平衡状態にある。各分子は，独立に$-a$または 0 のエネルギー状態をとり，aはVに依存して変化する（$a > 0$）。ボルツマン定数はk_{B}，$\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$とし，解答には$\beta$を用いて良い。

（1）ある着目した分子のエネルギーが，$-a$となる確率pを求めよ。さらに，$T \gg a/k_{\mathrm{B}}$でのpの極限p_{∞}を求めよ。

（2）系の，内部エネルギー Uを求めよ。さらに，$T \gg a/k_{\mathrm{B}}$でのUの極限U_{∞}を求めよ。

（3）系の，ヘルムホルツの自由エネルギーFにβを掛けたβFを求めよ。さらに，$T \gg a/k_{\mathrm{B}}$でのβFの極限βF_{∞}を求めよ。

（4）系の，エントロピー Sを求めよ。さらに，$T \gg a/k_{\mathrm{B}}$でのSの極限S_{∞}を求めよ。

（5）Vは$0 < V < 2V_0$の範囲で変化し，$a = a_0\left[1 - \left(\frac{V}{V_0} - 1\right)^2\right]$である（$a_0$と$V_0$は正の定数）。系の圧力$P$がゼロとなる際の体積$V'$を求めよ。さらに，$V < V'$での，$P$の符号を求めよ。

II　スピン量子数$\frac{1}{2}$で質量mの粒子が$\frac{N}{2}$個，スピン量子数０で質量mの粒子が$\frac{N}{2}$個，計N個の自由粒子からなる混合系が，一辺の長さがLの立方体（体積$V = L^3$）内で周期境界条件に従い，絶対温度Tの熱平衡状態にある。Nは十分大きいとする。プランク定数を2πで割った定数は$\hbar$，ボルツマン定数はk_{B}とする。

（１）　粒子の量子状態を特徴付ける波数ベクトル$\vec{k}$を，その大きさkが最小k_{min}の場合について，全て求めよ。

（２）　$\vec{k}$に対応した粒子１個のエネルギー$e_{\vec{k}}$を求めよ。

（３）　フェルミ粒子群について，フェルミ波数k_{F}を求めよ。

（４）　この混合系の，$T = 0$における内部エネルギー U_0を，k_{F}とk_{min}を使って求めよ。

（５）　この混合系の，$T \gg \frac{U_0}{Nk_{\mathrm{B}}}$における内部エネルギー U_∞を求めよ。

問題 18　量子物理学　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　次の（1）～（7）の問いについて答えよ。

波動関数f, gの内積は

$$\langle f | g \rangle = \int f^*(\boldsymbol{r}) g(\boldsymbol{r}) dV$$

で定義される。ここで，$\boldsymbol{r}$は位置ベクトル，f^*はfの複素共役，$\int dV$は全空間での積分を表す。hはプランク定数を表し，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$である。

（1）任意の波動関数fに対して$\langle f | f \rangle \geq 0$であることを示せ。

（2）任意の波動関数f，任意のエルミート演算子$\hat{O}$に対して，$\langle f | \hat{O}^2 | f \rangle \geq 0$であることを示せ。上問（1）で示した結果を用いて良い。

（3）任意の波動関数f，任意のエルミート演算子$\hat{O}$に対して，$\langle f | \hat{O} | f \rangle$が実数となることを示せ。

任意の規格化した波動関数ψ，任意のエルミート演算子$\hat{A}$および$\hat{B}$を考える。

（4）$i\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle$が実数となることを示せ。ここで，$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$である。上問（3）で示した結果を用いて良い。

（5）内積$\left\langle t(\hat{A}-\overline{A})\psi + i(\hat{B}-\overline{B})\psi \middle| t(\hat{A}-\overline{A})\psi + i(\hat{B}-\overline{B})\psi \right\rangle$は実数$t$の 2 次式$at^2 + bt + c$となる。ここで$\overline{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$, $\overline{B} = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle$である。定数$a$, b, cを$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\langle \psi | (\hat{A}-\overline{A})^2 | \psi \rangle$，$\langle \psi | (\hat{B}-\overline{B})^2 | \psi \rangle$および$\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle$のうちで必要なものを用いて表せ。

（6）エルミート演算子$\hat{A}$および$\hat{B}$に対応する物理量のゆらぎ$\overline{\Delta A} = \sqrt{\langle \psi | (\hat{A}-\overline{A})^2 | \psi \rangle}$および$\overline{\Delta B} = \sqrt{\langle \psi | (\hat{B}-\overline{B})^2 | \psi \rangle}$を考える。$\langle \psi | (\hat{A}-\overline{A})^2 | \psi \rangle \neq 0$のときの，$\overline{\Delta A} \cdot \overline{\Delta B}$と$\left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$の間に成り立つ不等式を書け。

（7）$\hat{A}$が位置演算子のx成分，$\hat{B}$が運動量演算子のx成分である場合を考える。このときの，

$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$，および$\overline{\Delta A} \cdot \overline{\Delta B}$の下限を求めよ。

II　球対称なポテンシャルに束縛された質量 m の粒子のエネルギー固有状態について，以下の設問 (1)~(4) に答えよ。ただし球座標 (球面座標) を (r,θ,φ) で表し，粒子の位置演算子を $\hat{\boldsymbol{r}}$, 運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{p}}$ とする。また，プランク定数を h とし，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ である。スピンの自由度は考慮しない。

(1) 球対称ポテンシャル中の粒子のエネルギー固有関数は，角運動量との同時固有状態により

$$\psi(\boldsymbol{r})=R(r)Y_{\lambda,\mu}(\theta,\varphi) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される。$Y_{\lambda,\mu}$ $(\lambda=0,1,2,\cdots,\quad \mu=-\lambda,-\lambda+1,\cdots,\lambda)$ は球面調和関数で，固有値方程式

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2 Y_{\lambda,\mu}=\Lambda Y_{\lambda,\mu}$$
$$\hat{l}_z Y_{\lambda,\mu}=M Y_{\lambda,\mu}$$

を満たす。ここで $\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ は角運動量演算子を表す。固有値 Λ および M を量子数 λ,μ および $\hbar$ を用いて表せ。

(2) 公式

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})^2=r^2\boldsymbol{\nabla}^2-r\frac{\partial^2}{\partial r^2}r \qquad \left[\boldsymbol{\nabla}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

を用いて，関係式

$$\hat{\boldsymbol{p}}^2=-\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{\hat{\boldsymbol{l}}^2}{r^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を示せ。

(3) ポテンシャルを $U(r)$ としてシュレーディンガー方程式

$$\left[\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}+U(r)\right]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r})$$

に波動関数 ① および関係式 ② を代入し，動径波動関数 $R(r)$ が従う常微分方程式を導け。なお，解答には上問 (1) の固有値の記号 Λ, M を用いてよい。

(4) 上問 (3) で得られた方程式は量子数 μ を含まないのでエネルギー固有値 E は量子数 μ に依存せず，量子数 λ に属するエネルギー固有値は $2\lambda+1$ 重に縮退する。この系に摂動

$$\hat{V}=\frac{K}{\hbar^2}\left(\hat{l}_x^2-\hat{l}_y^2\right) \qquad (K \text{ は定数})$$

が加わった場合のエネルギー固有値の変化について考える。$\hat{V}$ は $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ とは可換であるが $\hat{\boldsymbol{l}}$ とは非可換なので，上記の縮退が解ける。摂動を加える前に，あるエネルギー固有値 E_1 に縮退していた量子数 $\lambda=1$ の 3 つの固有状態の，摂動 $\hat{V}$ を加えた後のエネルギー固有値を求めよ。導出過程も示すこと。必要であれば

$$\hat{V}Y_{1,1}=KY_{1,-1},\quad \hat{V}Y_{1,0}=0,\quad \hat{V}Y_{1,-1}=KY_{1,1}$$

が成り立つことを用いてよい。