2024年度(令和6年度)

前　期　日　程

数　　　学　(120分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は，1ページから4ページまであります。解答用紙は，$\boxed{\text{前1}}$，$\boxed{\text{前2}}$，$\boxed{\text{前3}}$，$\boxed{\text{前4}}$の4枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて，各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
   なお，解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って，すべての解答用紙の該当欄に志望学科名(社会工学科を志望するものは志望分野名，創造工学教育課程を志望するものは志望コース名)及び受験番号(2か所)を記入しなさい。
5. 解答用紙の網掛け部分及び※を付した欄には，何も記入してはいけません。
6. 問題冊子の白紙と余白は下書きに適宜利用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 関数

$$f(x) = \sqrt{x}\log x \qquad (x > 0)$$

について，曲線 $y = f(x)$ を C とする。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(3) 曲線 C の変曲点の座標を求めよ。

(4) 点 $(1,\,0)$ における曲線 C の接線を ℓ とする。曲線 C の接線で ℓ と直交するものが何本あるか答えよ。

(5) 曲線 C，x 軸の $x \geqq 1$ の部分，および直線 $x = e^2$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$ 自然数からなる数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分ける。

(i) 第 m 群には $(2m-1)$ 個の自然数が含まれる。

(ii) 第 m 群の k 番目の自然数は $m \cdot 2^{k-1}$ である。

ただし m, k は自然数とする。つまり $\{a_n\}$ は

$$1 \mid 2,\ 4,\ 8 \mid 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48 \mid 4, \cdots\cdots$$

と表される。第 m 群のすべての自然数の和を T_m とする。

(1) a_{70} を求めよ。

(2) $a_n = 24$ となる n をすべて求めよ。

(3) T_m を m を用いて表せ。

(4) 第 1 群から第 m 群までのすべての自然数の和 $S_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} T_i$ を m を用いて表せ。

3 座標平面上の曲線 C を次で定める。

$$C: \begin{cases} x(\theta) = \cos\theta + \log\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) \\ y(\theta) = \sin\theta \end{cases} \qquad \left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$$

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dx}{d\theta} > 0$ を示せ。

(2) 曲線 C 上の点 P における C の接線と x 軸との交点を Q とするとき，線分 PQ の長さは θ によらず一定であることを示せ。ただし P は点 $(0, 1)$ とは異なるとする。

(3) 曲線 C の $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さ L を求めよ。

(4) 曲線 C，直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，および y 軸で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

4 四面体 OABC は $\mathrm{OA}=2$, $\mathrm{OB}=3$, $\mathrm{OC}=\sqrt{14}$, $\mathrm{AB}=\sqrt{7}$, $\mathrm{BC}=3\sqrt{2}$ をみたす。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

辺 AB を $1:2$ に内分する点を D，辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q とし，三角形 CPQ の重心を G とする。

四面体 OABC を辺 OA，辺 OB，辺 OC で切り開いて展開図を平面 ABC 上に描く。三角形 OAC に対応する平面 ABC 上の三角形を O′AC としたとき，四角形 O′ABC は円に内接する。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(3) $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(4) DG を最小にする t の値を求めよ。