

問題 1

関数

$$f(x) = x^3 \log x \quad (x > 0)$$

$$g(x) = ax^3 + b$$

を考える。ただし、 a, b は定数とする。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が点 $(e, f(e))$ を共有し、かつ、この点において共通な接線 ℓ を持つように定数 a, b の値を定めよ。
- (3) 定数 a, b と接線 ℓ は (2) で定めたものとする。曲線 $y = g(x)$ と直線 ℓ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

問題 2

座標平面上の3点 $O(0, 0)$, $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ を考える。ただし、 $a < 0 < b$ である。三角形 OAB の面積を S とする。

- (1) a, b を用いて S を表せ。
- (2) $\angle OAB$ が直角のとき、 b を a で表せ。
- (3) $\angle AOB$ が直角のとき、 $\frac{S}{b-a}$ の値を求めよ。