2025年度（令和7年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系　材料機能プログラム）

注 意 事 項

1．試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．問題は，１ページから１０ページまであります。解答用紙は，４枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3．下記表の問題を全て解答してください。１題につき解答用紙１枚を使用して解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
11	基礎物理数学
12	固体物理
13	材料物理化学
14	材料科学

4．監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム及び受験番号を４枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5．計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6．解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7．机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8．コンパス及び定規等は，使用できません。

9．時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10．スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11．試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12．試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題１１　基礎物理数学

設問すべてについて解答すること。最終的な解答結果には下線を引くこと。

Ⅰ　次の（１）～（２）の問いについて答えよ。

（１）次の行列式を求めよ。

（１ａ）
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

（１ｂ）
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

（１ｃ）
$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

（２）行列 σ_x，σ_y，σ_z を

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とし，i を虚数単位とする。

（２ａ）　$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ となることを証明せよ。

（２ｂ）　σ_x，σ_y，σ_z の固有値と固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルは規格化すること。

Ⅱ　バネに結びつけられた質点に，速度に比例する摩擦力がはたらくときの１次元振動問題を考える。運動方程式は次式で与えられる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma\frac{dx}{dt}$$

ここで x はバネが自然長のときを原点とした質点の変位，m は質点の質量，k はバネ定数，γ は摩擦に関する係数，t は時刻である。次の（１）～（５）の問いについて答えよ。

（１）特殊解を $x(t) = e^{\lambda t}$ とし，特性方程式を求めよ。

（２）特性方程式を解き，λ を求めよ。ただし $k/m = {\omega_0}^2$ とし，これ以降は k を用いずに ω_0 を用いて解答すること。

（３）λ は２つの実数解，２つの複素数解，重解のいずれかをとる。λ が２つの実数解をとる条件を示し，その場合の $x(t)$ の一般解を求めよ。未定定数には C_1 と C_2 を用いること。

（４）λ が２つの複素数解をとる条件を示し，その場合の $x(t)$ の一般解を求めよ。未定定数には C_1 と C_2 を用いること。

（５）λ が重解をとる条件を示せ。その場合，２つの独立な特殊解のうちの１つは $x_1(t) = e^{-\gamma t}$ である。もう１つの特殊解を $x_2(t) = f(t)e^{-\gamma t}$ とおいて $f(t)$ を定め，$x(t)$ の一般解を求めよ。解答には $f(t)$ を用いず，未定定数には C_1 と C_2 を用いること。

Ⅲ　２つの質点（質量m）がバネ（バネ定数k）で接続されたときの連成振動を考える（図１）。両質点の平衡位置からの変位をx_1，x_2とし，時刻をtすると，運動方程式は次式で表せる。

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2$$

これは連立２階線形微分方程式であり，行列を用いて次式に書きなおすことができる。

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = -kA\boldsymbol{x} \qquad \cdots\cdots \qquad ①$$

ここでAは2×2 正方行列であり，$\boldsymbol{x}$は次式の列ベクトルとする。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

次の（1）～（5）の問いについて答えよ。

（1）行列Aの固有ベクトルを求めよ。規格化すること。

（2）行列Aは，直交行列Vを用いて$V^{\mathrm{T}}AV$とすることにより，対角化できる。ここでV^{T}はVの転置行列である。行列Vを求めよ。

（3）行列Aを対角化せよ。

（4）ここで新しい座標系$\boldsymbol{q}=V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$を導入する（$\boldsymbol{q}=(q_1,q_2)^{\mathrm{T}}$）。式①の$\boldsymbol{x}$のかわりに$\boldsymbol{q}$を用いて微分方程式を解き，$q_1$および$q_2$を求めよ。ただし，$q_1$および$q_2$は余弦関数(cos)のみを用いて表すこととし，振幅の未定定数にはC_1，C_2を，位相の未定定数にはα_1，α_2を用いること。また，$k/m = {\omega_0}^2$とし，ω_0を用いて解答すること。

（5）（4）の結果を用いてx_1およびx_2を求めよ。

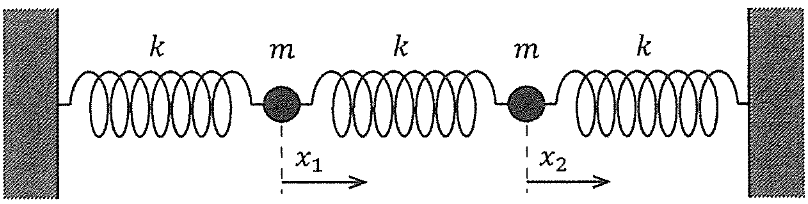

図１

問題１２　固体物理　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　次の文章を読んで問いに答えよ。

金属中の電子は剛体球状の原子が作る結晶中を運動し、平均してその速度に比例する抵抗力を受けるとするモデルを考える。このモデルによると、電場をE、電子の速度をv、電子の電荷を$-e$、電子の質量をm、bを定数とすると、電子の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\frac{dv}{dt} = -eE - bv \cdot \cdot \cdot ①$$

①を初期条件$t = 0$で$v = 0$の下で解き、特に$\tau = m/b$と置くと、①の解は$v =$(　　ア　　)となる。τは時間の次元を持ち、(　　イ　　)と呼ばれる。$t \to \infty$の定常状態における速度vはτを用いると(　　ウ　　)で与えられる。単位体積中の電子数をnとし、これがすべて電流に寄与するとすれば、定常状態の電流密度Jは(　　エ　　)Eとなる。この式は Ohm の法則の一般形であり、(　　エ　　)はσと書かれ、導電率と呼ばれる。

金属の顕著な性質は導電率と熱伝導率が大きいことである。古典統計によれば電子は１個当たり平均して$3k_BT/2$(k_B: Boltzmann 定数、T: 絶対温度)の運動エネルギーを持つから、１個の電子の移動に伴って$-e$の電荷と共に$3k_BT/2$のエネルギーの移動も起こる。それゆえ電気伝導と同時に熱伝導が起こり、導電率が大きいほど熱伝導率も大きくなる。実際は、熱エネルギーは電子だけでなく結晶格子によっても運ばれるが、いま電子からの寄与だけに注目すると、同一温度では熱伝導率Kと導電率σの比は、物質によらない定数Lを用いて、$K/\sigma T = L$となる。この関係を(　　オ　　)といい、Lを(　　カ　　)という。

(1) 空欄(ア)に入る数式を求めよ。なお導出の過程も記述し、bを用いずに表記すること。

(2) 空欄(イ)～(カ)に入る数式、語句を記せ。(ウ)については導出の過程も記述し、(エ)はτを用いて表記すること。

Ⅱ　次の文章を読んで問いに答えよ。

Sommerfeld は、自由電子は金属内部でいたる所で一定であるようなポテンシャルUの中にあると仮定した。金属の外に出るには急峻なポテンシャル障壁を乗り越えなければならないので、Sommerfeld のモデルでは、電子は図１のように$x \leqq 0$においては深さVのポテンシャルの中に存在することになる。このポテンシャル中の自由電子に対する１次元のシュレディンガー方程式は、

$$x \leqq 0 \text{ では} \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi \cdot \cdot \cdot ②$$

$$x \geqq 0 \text{ では} \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V\Psi = E\Psi \cdot \cdot \cdot ③$$

と書ける。$\hbar = h/2\pi$であり、hはプランク定数である。またmは電子の質量である。まずは$E > V$の場合を考える。$x \leqq 0$における②の解はA, Bを定数として、

$$\Psi = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad ・・・④$$

と書ける。k_1は入射波と反射波の波数を表し、正の実定数とする。④の第1項は$+x$方向に進む波(入射波)、第2項は$-x$方向に進む波(反射波)を表す。ここで④を②に代入すると、$k_1 =$(　　キ　　)となる。また同様に$x \geqq 0$における③の解はC, Dを定数として、

$$\Psi = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad ・・・⑤$$

と書ける。k_2は透過波の波数を表し、正の実定数とする。⑤の第 1 項は壁を乗り越えて$+x$方向に進む波(透過波)、第2項は$x = 0$に向かって$+x$方向から進行してくる波である。今$x \geqq 0$では、$+x$方向からの波はないので、D=0となる。⑤を③に代入すると、同様に$k_2 =$(　　ク　　)となる。$x = 0$では波動関数Ψが滑らかで連続であることを考慮して解いていく。$x = 0$で連続であることから、係数$A,\ B,\ C$の間には(　　ケ　　)の関係がある。また$x = 0$で導関数$d\Psi/dx$も一致することから、係数$A,\ B,\ C$の間には(　　コ　　)の関係もあることがわかる。従って入射波の振幅Aを用いてBとCを表すと、B=(　　サ　　)A、C=(　　シ　　)Aとなる。この比率で反射率、透過率を求めてみよう。まず$\hbar,\ k_1,\ m$を用いて、入射波と反射波の速度の絶対値は$|v| =$(　　ス　　)と書ける(ヒント:粒子の運動量pは波数をkとすれば$p = \hbar k$と表される)。ここで波動関数が$\psi = Z\exp(iKx)$で表されるとき(Zは複素定数、Kは実定数)、$v|\psi|^2$を確率の流れの密度と定義する。反射率Rは入射波と反射波の確率の流れの密度の絶対値の比率で$R =$(　　セ　　)と書ける。次に透過率Tを求める。入射波と透過波の波数はそれぞれk_1、k_2であることに注意して、反射率と同様にして入射波と透過波に対する確率の流れの密度の比率を取って、T=(　　ソ　　)と書ける。当然(　　セ　　)+(　　ソ　　)=1となり、確率の総和は1に保たれる。

(1)　空欄(キ)～(ソ)に入る数式を記せ。ただし、(サ)～(ソ)は、k_1、k_2のいずれかまたは両方を用いて解答すること。

(2)　$E<V$の場合(図2)は、古典力学では進入不可能な$x \geqq 0$の領域に、波の一部がしみ出すことになる。この時の③の一般解は、F, Gを定数として、

$$\Psi = Fe^{k_3x} + Ge^{-k_3x} \quad ・・・⑥$$

と書ける。ただしk_3は正の実定数とする。ここで$|\Psi|^2$は位置xにおける電子の確率密度を表すため、

$x \to \infty$で$\Psi \to \infty$になることは物理的にあり得ない。従って$F = 0$となる。この$x \geqq 0$における波動関数について、$E > V$のときに用いた境界条件($x = 0$でΨはなめらかに連続)を参考にして、入射波の振幅Aに対する比G/Aをk_1, k_3を用いて求めよ。導出の過程も記述すること。

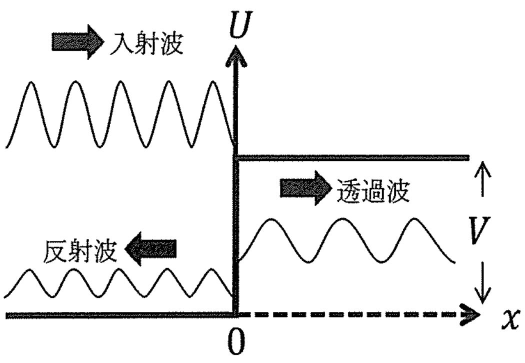

図1

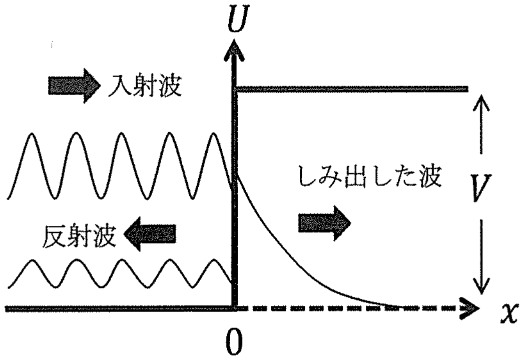

図2

問題１３　材料物理化学

設問すべてについて解答すること。

I　次の文章を読み，（１）～（６）の問いについて答えよ。

電位−pH 図は，水溶液中で熱力学的に安定な化学種の存在領域を，電極電位と pH を軸として二次元座標上に図示したものである。この図は，創始者の名をとって＿＿①＿＿ダイヤグラムともよばれる。金属の電位−pH 図を作図することで，図上に金属イオンの安定域，金属の安定域，水酸化物・酸化物の安定域が現れる。図に 25℃における Cu の電位−pH 図を示す。図中の破線(a)および(b)は酸素と水素イオンの酸化還元の平衡線を示しており，これらから環境中の酸化剤（酸素や水素イオン）が酸化力を示す領域を推定できる。

（１）　①に入る用語を示せ。

（２）　図中の Cu, Cu^{2+}, Cu_2O, CuO を活性態，不活態，不働態に分類せよ。

（３）　図中の破線(a)および(b)の反応式を示せ。

（４）　破線(b)の反応式における電位をネルンストの式で示せ。このとき，破線(b)の反応式におけるネルンストの式の電位を E'，標準電極電位を E_0' とせよ。また，水素，酸素，水の活量を 1，H^+の活量を a_{H^+}，気体定数を R，絶対温度を T，ファラデー定数を F とせよ。

（５）　図中の Cu^{2+}/Cu の境界線②を決定する反応式を示せ。

（６）　境界線②の反応式における電位 E_{Cu} をネルンストの式により表せ。このとき，標準電極電位を $E_{Cu,0}$，Cu の活量を 1，Cu^{2+}の活量を $a_{Cu^{2+}}$ とし，R は気体定数，T は絶対温度，F はファラデー定数とせよ。

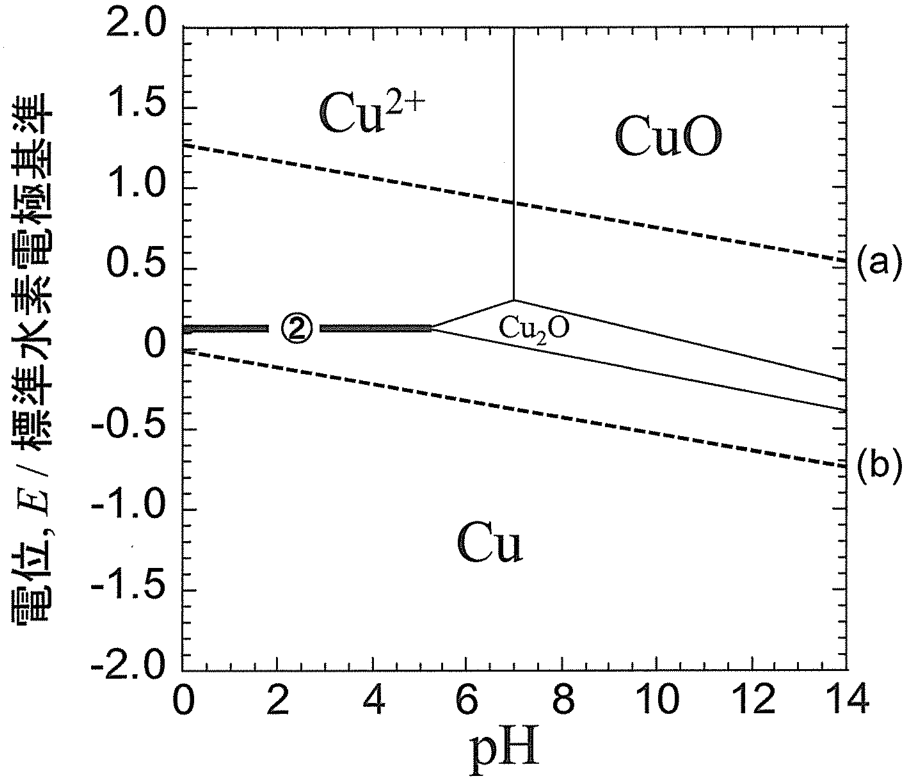

図 25℃における Cu の電位−pH 図。

Cu イオンの活量を 10^{-6}, $P(H_2) = P(O_2) = 1$ atm としている。

Ⅱ　次の文章を読み，（１）～（６）の問いについて答えよ。

金属の酸性溶液および中性・アルカリ性溶液中での水素発生反応機構は，Volmer 反応，Tafel 反応，Heyrovsky 反応の組み合わせで進行する。ここで，酸性溶液中において式①および式②により表される水素発生反応を考える。

$$H^+ + e^- \leftrightarrow H_{ad} \quad : (\underline{\text{a: Volmer, b: Tafel, c: Heyrovsky}})\ \text{反応} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$H_{ad} + H_{ad} \rightarrow H_2 \quad : (\underline{\text{a: Volmer, b: Tafel, c: Heyrovsky}})\ \text{反応} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

ここで，H_{ad}は水素吸着原子である。式①において，正および逆方向の反応速度$v_{+,①}$および$v_{-,①}$は，H_{ad}の被覆率をθ，その飽和吸着濃度をC^s_{ad}とすると，それぞれ以下の通り表される。

$$v_{+,①} = k_{+,①}(1-\theta)a_{H^+}\exp\left\{\frac{-(1-\beta)F\eta}{RT}\right\} = k'_{+,①}(1-\theta) \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

ただし，$k'_{+,①} = k_{+,①}a_{H^+}\exp\left\{\frac{-(1-\beta)F\eta}{RT}\right\}$

$$v_{-,①} = k_{-,①}\theta C^s_{ad}\exp\left\{\frac{\beta F\eta}{RT}\right\} = k'_{-,①}\theta \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

ただし，$k'_{-,①} = k_{-,①}C^s_{ad}\exp\left\{\frac{\beta F\eta}{RT}\right\}$

ここで，$k_{+,①}$と$k_{-,①}$は正および逆方向の反応速度定数，a_{H^+}は水素イオンの活量，βは対称因子，Rは気体定数，Tは絶対温度，Fはファラデー定数，ηは平衡電位からのずれである過電圧である。式③において，$1-\theta$の項は吸着していない部分の面積比に相当する。したがって，吸着が起こるのは電極の未吸着部分のみとなる。

（１）　文章中の式①および②の__________の中に入る適切な語句を a～c から選び，アルファベットで答えよ。

（２）　式②が律速段階と仮定すると，式①は平衡と見なせる。このとき，θを$k'_{+,①}$と$k'_{-,①}$を用いて表せ。

（３）　式②において，電流 i を式②の正方向の反応速度$v_{+,②}$とFを用いて示せ。ただし，$n=2$ とせよ。

（４）　$v_{+,②}$を式②の正方向の反応速度定数$k_{+,②}$，θ およびC^s_{ad}により表せ。

（５）　（３）および（４）で導出した式から，ηが小さい場合（$\eta \fallingdotseq 0$）における i を求めよ。

（６）　（３）および（４）で導出した式から，ηが大きい場合における i を求めよ。

問題１４　材料科学

設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　次の（１）～（６）の問いについて答えよ。ただし，$\sqrt{2} = 1.41$，$\sqrt{3} = 1.73$および$\sqrt{5} = 2.24$とすること。

（１）　図１の立方晶および六方晶の模式図に示すA，B，C，およびDの面方位を答えよ。

（２）　純銅の格子定数は，$a = 0.361$ nm である。純銅の(1 1 1)の面間隔を算出せよ。ただし，有効数字３桁で答えること。

（３）　純銅単結晶を引張試験に供した。このときの引張方向は[1 1 2]方向である。このとき活動する可能性があるすべり系を$(\bar{1}\,1\,1)[1\,0\,1]$，$(1\,1\,1)[\bar{1}\,0\,1]$および$(1\,\bar{1}\,1)[0\,1\,1]$としたとき，引張試験で生じるすべりは単一すべりあるいは二重すべりのどちらであろうか。引張試験で生じるすべりを答えよ。

（４）　前項（３）で答えた引張試験で生じるすべりの理由について，シュミット因子を計算したうえで答えよ。

（５）　純鉄におけるγ-鉄は，α-鉄に比べて炭素を多く固溶することができる。鉄の原子半径をrとして，γ-鉄およびα-鉄の八面体位置における隙間半径を算出し，γ-鉄がα-鉄に比べて炭素を多く固溶できることを示せ。ただし，原子を剛体球として考える。

（６）低炭素鋼に対して引張試験を行った。この引張試験で得られる応力-ひずみ曲線の模式図を描き，その変形挙動について説明せよ。

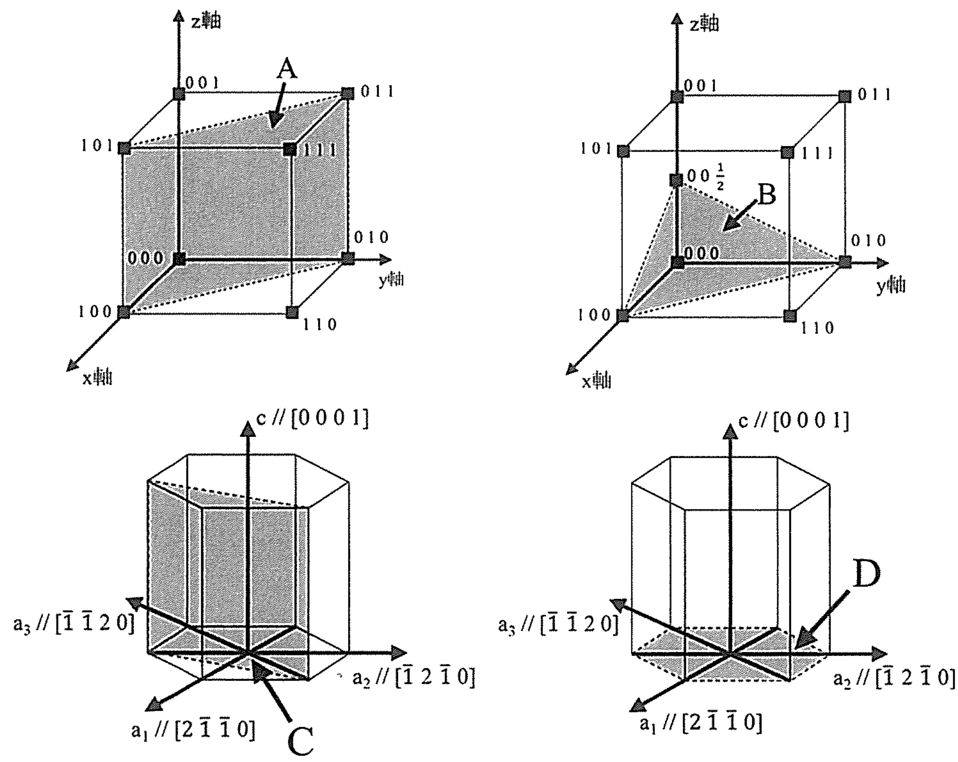

図１ 立方晶および六方晶の模式図。

II　次の（1）～（6）の問いについて答えよ。

（1）　図 2 は，Fe-C 系状態図の模式図を示している。また，Fe_3C の炭素濃度は 6.69 mass%である。Fe-0.45 mass%C 合金を 850°Cから A_1 点(727℃)直下までゆっくりと冷却したとき，初析フェライト(α)相とパーライト組織の質量比を求めよ。

（2）　前問（1）における A_1 点直下でのパーライト組織中のα相と Fe_3C 相の質量比を求めよ。

（3）　図 3 は，共析鋼の連続冷却変態線図(CCT 線図)の模式図である。オーステナイト(γ)相単相の共析鋼を CCT 線図中の冷却速度 A および冷却速度 B の速度で冷却した。このとき，冷却速度 A で作製した共析鋼および冷却速度 B で作製した共析鋼の微細組織の違いを説明せよ。

（4）　共析鋼をγ相単相の温度から水焼入れした。このとき得られる組織の名称を答えよ。

（5）　前問（4）で回答した組織は，高密度の格子欠陥を持つ。その理由を説明せよ。

（6）　図 3 の CCT 線図に示す C 変態開始温度は，時間に関わらず一定の温度である。その理由を説明せよ。

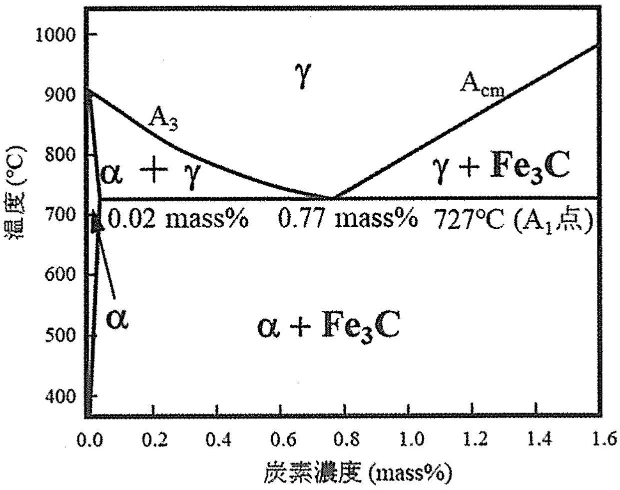

図 2 Fe-C 系状態図の模式図。

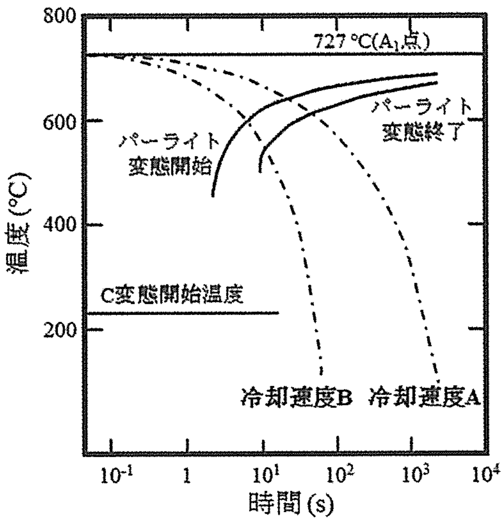

図 3 共析鋼の CCT 線図の模式図。