

2025 年度（令和 7 年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

専門試験問題

（物理工学系 応用物理プログラム）

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は、1 ページから 10 ページまであります。解答用紙は、4 枚あります。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせてください。
3. 下記表の問題を全て解答してください。1 題につき解答用紙 1 枚を使用して解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
15	基礎物理数学
16	電磁気学
17	統計物理学
18	量子物理学

4. 監督者の指示に従って、問題番号、志望プログラム、分野及び受験番号を 4 枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。
5. 計算用紙は、問題冊子の白紙ページを利用してください。
6. 解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入してください。
7. 机の上には、受験票、黒の鉛筆・シャープペンシル、消しゴム、鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。
8. コンパス及び定規等は、使用できません。
9. 時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は、使用しないでください。
10. スマートフォン、携帯電話、ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し、それらの機器のアラームを解除してから、電源を切り、かばん等に入れてください。
11. 試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は、手をあげてください。
12. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 15 基礎物理数学 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1), (2) の問いについて答えよ。

(1) 3次元デカルト座標系 (x, y, z) におけるベクトル場 $\vec{F}(x, y, z) = (2x - 3y, -3x, 4z)$ を考える。

以下の設問に答えよ。

(1a) $\vec{F}$ の回転 ($\text{rot } \vec{F}$) を求めよ。

(1b) $\vec{F}$ はあるスカラー関数 $U(x, y, z)$ の勾配として, $\vec{F} = \text{grad } U$ と表せる。 U を求めよ。

(1c) 点 A : $(5, -2, 1)$ を始点, 点 B : $(-3, 1, 4)$ を終点とする直線経路 C に対し, 線積分

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を求めよ。ただし $d\vec{r}$ は経路 C に沿う微小変位を表す線素ベクトルである。

(2) 3次元デカルト座標系 (x, y, z) におけるベクトル場 $\vec{E}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ を考える。原点を中心とする半径 $R (> 0)$ の球の表面領域を S , 球の内部領域を V とする。以下の設問に答えよ。

(2a) ベクトル場 $\vec{E}$ の発散 ($\text{div } \vec{E}$) を求めよ。

(2b) 閉曲面 S , S の単位法線ベクトル $\vec{n}$ (閉曲面の外側向き), 内部領域 V , ベクトル場 $\vec{E}$ に対して, ガウスの発散定理の式を書け。

(2c) S 上でのベクトル場 $\vec{E}$ の面積分 $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$ を求めよ。

II 次の1階常微分方程式の解 $y(t)$ を求めよ。ただし $k > 0$ は定数であり, $0 < y < 1$ である。

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(1 - y), \quad y(t = 0) = \frac{1}{2}$$

Ⅲ 次の(1)～(3)の問いについて答えよ。

(1) $f(t)$ が周期 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ の周期関数のとき、係数 a_n , b_n , c_n を

$$a_n = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

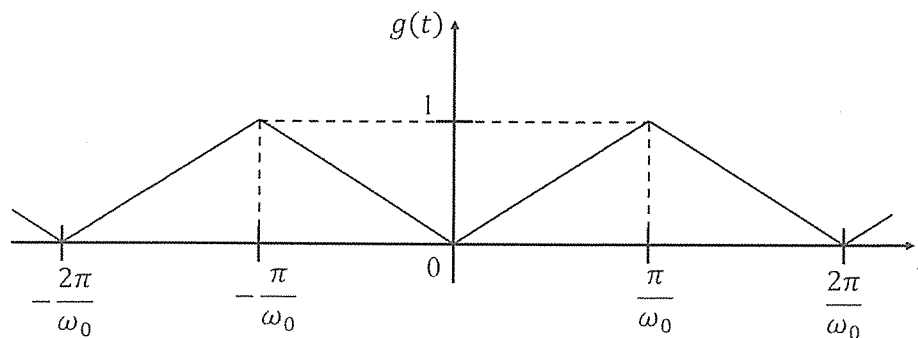
$$b_n = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$c_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

とする。このとき、 c_n 及び $|c_n|$ を a_n と b_n を用いて表せ。

ただし、虚数単位を i 、自然対数の底を e とする。また、 ω_0 は角周波数($\omega_0 > 0$)とし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ である。

(2) 図の周期関数 $g(t)$ のフーリエ級数を求めよ。答えは三角関数を用いて示せ。



(3) (2)の結果を用いて、次の無限級数を求めよ。ただし、 $m = 1, 2, 3, \dots$ とする。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$$

問題 16 電磁気学 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) ~ (6) の問いについて答えよ。

図 1 に示すように、鉛直方向上向きに一様な磁束密度 B の磁場がかけられている空間に、水平から角度 θ ($0 < \theta < \pi/2$) 傾斜した十分に長い 2 本の導体レールが、間隔 w で平行に固定されている。レールの左端には抵抗器 (抵抗値 R) が接続されている。レールと直交するように導体棒 (質量 m) を静かに置くと、導体棒は重力 (重力加速度 g) を受けてなめらかに滑り始めた。導体棒はレールと直交する状態を保ったまま回転することなく滑り、やがて速度が一定となった。導体棒が滑り始める時刻を $t = 0$ 、時刻 t でのレールに平行な方向に滑る速度を $v(t)$ とする。レールと棒の太さはレールの間隔に比べて十分に小さいものとする。導体棒は 2 本のレールと電氣的に接触している。抵抗器以外の電気抵抗、棒とレールの間の摩擦および棒の運動に対する空気抵抗、棒やレールを流れる電流により生じる磁場は全て無視できるものとする。

- (1) 導体棒が速度 $v(t)$ で滑るとき、導体棒-レール-抵抗器-レール-導体棒の閉回路に発生する起電力の大きさを求めよ。
- (2) 導体棒が速度 $v(t)$ で滑るとき、抵抗器に流れる電流を求めよ。
- (3) 運動する導体棒は磁場からの力と重力を受ける。時刻 t において、レールに平行な方向の導体棒の運動方程式を書け。ただし、速度の時間微分は $dv(t)/dt$ でよい。
- (4) 上問 (3) の運動方程式は、 t に依存しない k, V を用いて次のように変形することができる。

$$\frac{dv(t)}{dt} = -k\{v(t) - V\}$$

ここで V は一定となる速度 (終端速度) である。 V を m, g, R, B, w, θ を用いて表せ。

- (5) 導体棒が速度 V で滑るとき、抵抗器で単位時間に消費されるジュール熱を V, m, g, θ を用いて表せ。
- (6) 上問 (4) の微分方程式を解いて、 $v(t)$ を k, V を用いて表せ。ただし、 $v(0)=0$ である。必要に応じて以下の公式を用いてもよい。

$$\frac{d}{dx}(\log_e |x|) = \frac{1}{x}$$

このように力学的エネルギーから電氣的エネルギーへの変換が可能である。

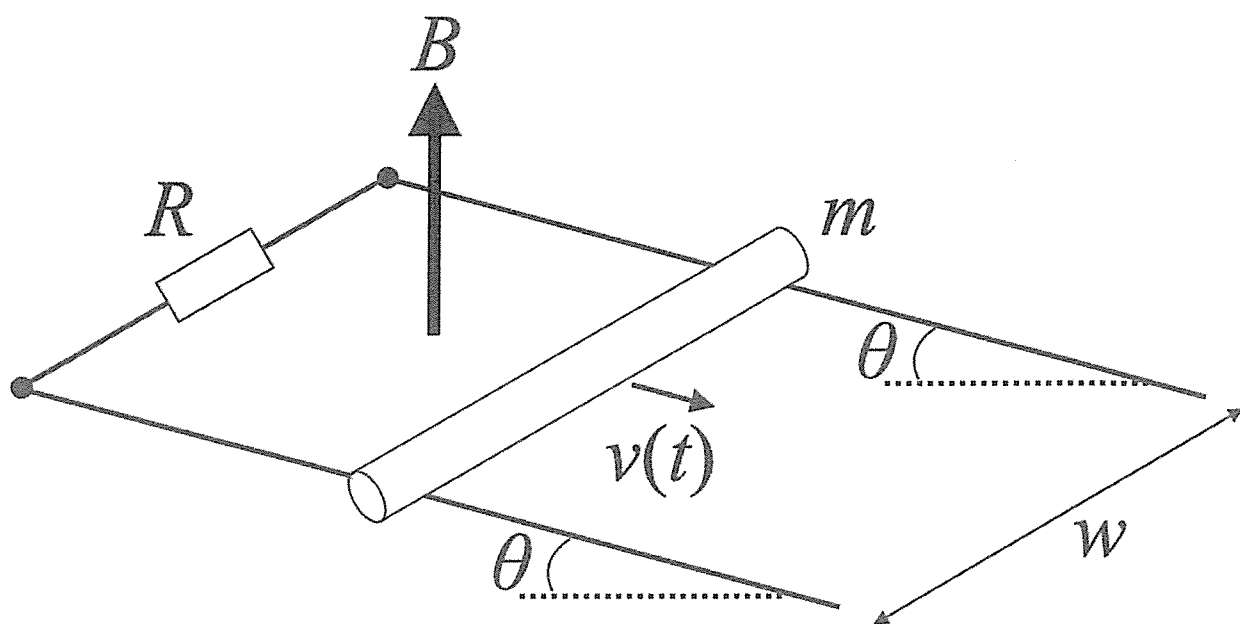


图 1

II 次の(1)～(8)の問いについて答えよ。

電磁気学で扱う現象は、対称性に応じた座標系を選択することで扱いが容易になる場合が多い。以下では、半径 a の無限に長い円柱に関連する現象を円柱座標系で考える。

円柱座標系は、中心軸からの動径方向、中心軸に対して右ねじ回りの方位角方向、中心軸方向の3軸から構成される。座標 (r, θ, z) ($0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$) でのベクトル場 $\mathbf{A}$ は各方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ を用いて、

$$\mathbf{A}(r, \theta, z) = A_r(r, \theta, z)\mathbf{e}_r + A_\theta(r, \theta, z)\mathbf{e}_\theta + A_z(r, \theta, z)\mathbf{e}_z$$

と表される。 $\mathbf{A}$ の発散と回転は、 $r > 0$ のときに以下のように表される。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

- (1) ベクトル場 $\mathbf{X} = r^n \mathbf{e}_r$ (n は整数, $r > 0$) について、発散と回転を求めよ。
- (2) ベクトル場 $\mathbf{Y} = r^n \mathbf{e}_\theta$ (n は整数, $r > 0$) について、発散と回転を求めよ。

円柱の内部 ($0 \leq r \leq a$) に電荷が一様に体積密度 ρ で分布している。真空の誘電率を ϵ_0 とする。

- (3) 円柱の内部 ($0 \leq r \leq a$) および外部 ($r > a$) の点での電場 $\mathbf{E}$ を $\mathbf{e}_r$ を用いて表せ。
- (4) 上問 (3) の $\mathbf{E}$ について、円柱の内部 ($0 < r \leq a$) での発散と回転を求めよ。
- (5) 上問 (3) の $\mathbf{E}$ について、円柱の外部 ($r > a$) での発散と回転を求めよ。

円柱の内部 ($0 \leq r \leq a$) に z 軸方向に一様な定常電流が面密度 ie_z で流れているとき、磁場が生じる。真空の透磁率を μ_0 とする。

- (6) 円柱の内部 ($0 \leq r \leq a$) および外部 ($r > a$) の点での磁束密度 $\mathbf{B}$ を $\mathbf{e}_\theta$ を用いて表せ。
- (7) 上問 (6) の $\mathbf{B}$ について、円柱の内部 ($0 < r \leq a$) での発散と回転を求めよ。
- (8) 上問 (6) の $\mathbf{B}$ について、円柱の外部 ($r > a$) での発散と回転を求めよ。

問題 17 統計物理学 設問すべてについて解答すること。

I 同種の N 個の古典粒子が、 x 軸上での周期境界条件下の区間 $[0, L]$ で、ポテンシャル場 $\phi(x)$ のもと、絶対温度 T の熱平衡状態にある。図 1 のように、粒子は位置 $x_i = \frac{i}{M}L$ (i は整数, M は大きな自然数)にのみ存在でき、対応するポテンシャル $\phi_i \equiv \phi(x_i)$ とする (周期境界条件から, $\phi_0 = \phi_M$, $\phi_{M+1} = \phi_1$)。 ϕ は ϕ_α で最小。任意に選んだ 1 個の粒子が x_i に存在する確率は p_i とする ($\sum_{i=1}^M p_i = 1$, 周期境界条件から, $p_0 = p_M$, $p_{M+1} = p_1$)。以下では, $p_i > 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, M, M+1$)とする。 k_B はボルツマン定数。

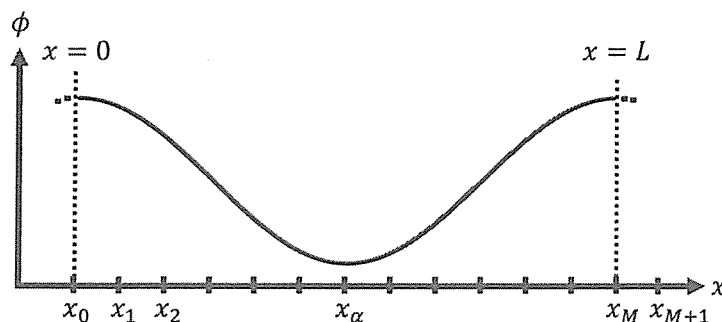


図 1 ポテンシャル場 $\phi(x)$ と粒子が存在できる位置 $\{x_i\}$ の様子。

初めに、全ての粒子間に相互作用が働かない場合を考える。

- (1) $\{p_i\}$ の分布が ϕ_i に関するボルツマン分布となることから, p_i の式を書け。
- (2) 系の内部エネルギー $U = N \sum_{i=1}^M p_i \phi_i$ である。エントロピー $S = -Nk_B \sum_{i=1}^M p_i \ln p_i$ とする。

$\sum_{i=1}^M p_i = 1$ の条件下でヘルムホルツの自由エネルギーを最小にすることで, p_i の式を導け。

次に、隣同士の位置に粒子が共に存在する際には粒子間に引力型の相互作用が働き、系の内部エネルギー $U = N \sum_{i=1}^M p_i \phi_i - bN^2 \sum_{i=1}^M p_i p_{i+1}$ となる場合を考える ($b > 0$)。

- (3) $\sum_{i=1}^M p_i = 1$ の条件下でヘルムホルツの自由エネルギーを最小にすることで, p_i を p_{i-1} と p_{i+1} を含んだ式で書け。
- (4) b を限りなく 0 に近い値から少しずつ大きくすると, x_α 付近での $\{p_i\}$ の分布はどのように変わっていくか説明せよ。

II 以下3つの自由粒子系のそれぞれは、一辺の長さが L の立方体（体積 $V = L^3$ ）内で周期境界条件に従い、絶対温度 T の熱平衡状態にある。全ての系で粒子数は十分大きい。プランク定数を 2π で割った定数は $\hbar$ 、ボルツマン定数は k_B として良い。

系1：スピン量子数 $\frac{3}{2}$ で質量 m の粒子 $2N$ 個から成る系

系2：スピン量子数 $\frac{1}{2}$ で質量 m の粒子 N 個と、スピン量子数 $\frac{5}{2}$ で質量 m の粒子 N 個から成る2成分系

系3：スピン量子数 $\frac{1}{2}$ で質量 m の粒子 N 個から成る系

- (1) 粒子の量子状態を特徴付ける波数ベクトル $\vec{k}$ に対応した、粒子1個のエネルギー $e_{\vec{k}}$ を書け。
- (2) 系1について、 $T = 0$ における内部エネルギー U_1 を書け。
- (3) 系2について、 $T = 0$ における内部エネルギー U_2 を書け。
- (4) U_1 と U_2 のどちらが大きいかわか説明せよ。
- (5) $T = 0$ 付近での定積熱容量 C_V は、系1と系3のどちらの系の方が大きいかわか説明せよ。

問題 18 量子物理学

設問すべてについて解答すること。

I 1次元量子系に関する次の(1)～(7)の問いについて答えよ。

1次元方向を x 方向とする。時間を t , 位置座標を x とし, プランク定数を h , $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とする。系のハミルトニアンを $\hat{H}$ とする。

(1) $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ を求めよ。ここで $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ は演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ の交換子であり, $\hat{x}$ は位置演算子, $\hat{p}_x$ は運動量演算子である。

(2) 波動関数 $\psi(x, t)$ の時間発展を記述する方程式を書け。

$\psi(x, t)$ は規格化されているものとする。

(3) 状態 $\psi(x, t)$ におけるエルミート演算子 $\hat{O}$ の期待値 $\bar{O}(t)$ を, $\psi(x, t)$ および $\psi^*(x, t)$ を用いて表せ。ここで, $\psi^*(x, t)$ は $\psi(x, t)$ の複素共役である。

(4) 時間に陽に依存しない演算子 $\hat{O}$ の期待値の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \bar{O}(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(x, t) | [\hat{O}, \hat{H}] | \psi(x, t) \rangle$$

となることを, (2) の結果から導出せよ。ここで,

$$\langle \psi(x, t) | [\hat{O}, \hat{H}] | \psi(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) [\hat{O}, \hat{H}] \psi(x, t) dx$$

である。

以下, ポテンシャルがゼロである場合を考える。粒子の質量を m とする。

(5) 位置の期待値 $\bar{x}(t)$ および運動量の期待値 $\bar{p}_x(t)$ の時間変化 $\frac{d}{dt} \bar{x}(t)$ および $\frac{d}{dt} \bar{p}_x(t)$ を $\bar{x}(t)$,

$\bar{p}_x(t)$ および m を用いて表せ。必要であれば, 一般の演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ に対して,

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \text{ が成り立つことを用いて良い。}$$

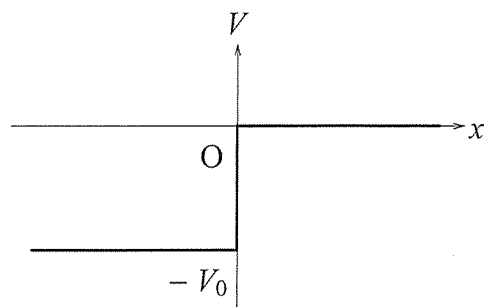
(6) $\bar{x}(t) = \alpha t + \beta$, ここで α, β は定数, と書くことができることを示せ。

(7) 時刻 $t=0$ での波動関数が $\psi(x,0) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{a}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$ で与えられるとき, $\bar{x}(t)$ を求めよ。

ここで a は長さの次元をもつ正の定数である。

II x 軸に沿って運動する質量 m の粒子の、
右図のような階段型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$



による透過と反射について考える。 $x < 0$ の
領域からエネルギー E ($E > 0$) で正の向き
に入射した粒子の定常状態の波動関数は

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Re^{-ik_1x} & x \leq 0 \\ Te^{ik_2x} & x > 0 \end{cases}$$

と表される。ここで A, R, T は複素定数、 k_1 および k_2 は正の実定数である。プランク定数を 2π で割った定数を $\hbar$ として以下の設問に答えよ。

- (1) k_1, k_2 をそれぞれエネルギー E を用いて表せ。
- (2) 波動関数の絶対値の 2 乗は、単位長さあたりに粒子を見出す確率、すなわち確率密度に比例すると解釈することができる。このとき、 $x = 0$ における入射波のフラックス（確率の流れ密度）と、反射波および透過波のフラックスのあいだに成り立つ確率保存則を表す等式を A, R, T および k_1, k_2 のうち必要なものを用いて記せ。
- (3) 波動関数の $x = 0$ での接続条件より、反射波の係数 R と透過波の係数 T をそれぞれ A, k_1, k_2 を用いて表せ。
- (4) 上問 (3) で求めた R, T が上問 (2) の確率保存則を満たすかどうかを調べよ。
- (5) 粒子が $x = 0$ で反射される確率が $\frac{1}{4}$ となるエネルギー E を求めよ。