2025 年度（令和 7 年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

私費外国人留学生

専門試験問題

情報工学系

（ネットワークプログラム、知能情報プログラム、メディア情報プログラム、情報数理プログラム）

注　意　事　項

1．試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．問題は，１ページから１３ページまであります。解答用紙は，６枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3．下記表の問題番号 14 から 19 の中から２題を解答してください。<u>１題につき解答用紙１枚を使用して</u>解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
14	計算機ソフトウェア Computer software
15	計算機ハードウェア Computer hardware
16	情報数学 Mathematics for computer science
17	微分積分・線形代数 Calculus and linear algebra
18	数理科学１ Mathematics 1
19	数理科学２ Mathematics 2

4．監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム及び受験番号を２枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5．計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6．解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7．机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8．コンパス及び定規等は，使用できません。

9．時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10．スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11．試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12．試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 14　計算機ソフトウェア　設問についてすべて解答すること。

I　次の（1）～（3）の問いについて答えよ。

（1）N 個の数値に対するソートアルゴリズムに関する以下の文章について，正しい場合は○，誤りの場合は×と答えよ。ただし，ここでのソートアルゴリズムは全て昇順ソートとし，数値がソートされても処理を途中で中断することはないものとする。

(i) バブルソートの最悪の時間計算量は $\Theta(N^3)$ である。

(ii) 昇順にソート済みの N 個の数値が与えられた場合，挿入ソートは $O(N)$ 時間で終了する。

(iii) 昇順にソート済みの N 個の数値が与えられた場合，バブルソートは $O(N)$ 時間で終了する。

(iv) クイックソートはピボットの決め方によらず $O(N\log N)$ の時間計算量となる。ピボットの選択自体にかかる時間計算量は無視できるとする。

(v) 比較ソートでは $\Omega(N\log N)$ が最悪時の時間計算量の下界である。

(vi) 基数ソートは比較ソートの一種である。

（2）以下の (i)～(iii) は，A: 挿入ソート，B: 基数ソート，C: バブルソート，D: 選択ソートのいずれかのソートアルゴリズムを数値列 $15, 140, 6, 57, 2$ に適用した際の実行途中の数値列の状態を示している。1 行目は初期数値列のため (i)～(iii) で共通であり，2 行目以後の数値列はそれぞれ異なるアルゴリズム中の別々の状態を抜き出したものである。ただし，いずれも下の行の数値列ほど処理が進んだ段階での状態である。また，最後の行はソート済みの数値列となっている。(i)～(iii) のそれぞれについて，どのソートアルゴリズムによるものか A から D の中から選べ。

(i)

15	140	6	57	2
140	2	15	6	57
2	6	15	140	57
2	6	15	57	140

(ii)

15	140	6	57	2
15	6	57	2	140
6	15	2	57	140
6	2	15	57	140
2	6	15	57	140

(iii)

15	140	6	57	2
15	140	6	57	2
6	15	140	57	2
6	15	57	140	2
2	6	15	57	140

（3）図 1 の `Sort` 関数はサイズ `N` の数値配列 `data` と非負の整数 `low` と `high` を受け取り，マージソートにより昇順ソートを行うものとする。配列 `data` 全体をソートする場合は `Sort(data, 0, N-1)` のように呼び出しを行う。配列の添字は 0 から始まるとする（例えば，配列 `data` は `data[0]` から `data[N-1]` を要素とする）。また，`if` 文の条件部において，(条件 1 `and` 条件 2) の条件 2 が評価されるのは条件 1 が真のときのみ，(条件 1 `or` 条件 2) の条件 2 が評価されるのは条件 1 が偽のときのみとする。次の (i)～(ii) の問いについて答えよ。

(i) 図 1 の空欄 $\boxed{\texttt{(A)}}$～$\boxed{\texttt{(F)}}$ に適切な内容を入れよ。ただし，$\boxed{\texttt{(A)}}$～$\boxed{\texttt{(C)}}$ には `0`, `low`, `mid-1`, `mid`, `mid+1`, `high`, `N-1` のいずれかが入る（`N` はグローバル変数として `Sort`

内からも参照可能とする)。また，(D) には，不等号 <= か >= のいずれかが入るものとする。

(ii) 配列 data に対して，数値列 a_1, a_2, a_3 がこの順で格納されているとする。この a_1, a_2, a_3 に対して図 1 のマージソートによる決定木を図 2 として作る。(a)〜(e) に入る適切な比較ペア及び (f)〜(k) に入るソートの結果をそれぞれ答えよ。ただし，(a)〜(e) については例えば a_1 と a_2 を比較する際は $a_1 : a_2$ のように表記し，添字の小さいものを左側に表記すること。このとき，比較結果が $a_1 \leq a_2$ なら左下の頂点へ，$a_1 > a_2$ なら右下の頂点へ推移するものとする。(f)〜(k) については a_1, a_2, a_3 のように並び替えられた数値列を記載すること。

```
Sort(data, low, high)
    if (low < high)
        mid に ((low + high) / 2) の小数点以下を切り捨てた値を代入する

        Sort(data, (A), mid)
        Sort(data, (B), (C))

        新規の配列 temp に数値列 data[low], data[low+1], ..., data[high] をこの順に格納する
        i = low
        j = mid + 1
        for (k = low to high)
            if (i <= mid) and ((j > high) or ((E) (D) (F)))
                data[k] = (E)
                i = i + 1
            else
                data[k] = (F)
                j = j + 1
```

図 1: マージソートの疑似コード

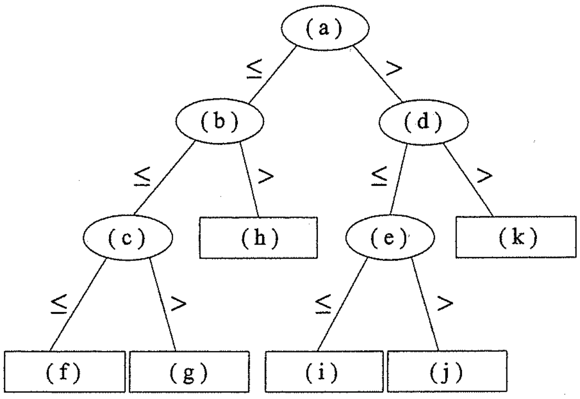

図 2: 決定木

Ⅱ　次の（1）～（3）の問いについて答えよ。

（1）　次の通り定義されるオートマトン M に関する問い(a)～(c)について答えよ。

$M=<Q,\Sigma,\delta,q_0,F>$　ただし，$Q=\{q_0,q_A,q_B\}$, $\Sigma=\{a,b\}$, $q_0=q_0$, $F=\{q_B\}$,

$\delta=\{\delta(q_0,a)=\{q_0,q_A\},\delta(q_0,b)=\{q_0\},\delta(q_A,b)=\{q_B\}\}$ とする。

(a) M が受理(識別)する言語 L を正規表現で表せ。

(b) M と等価であり，かつ空動作も任意の入力に対して未定義の動作も無い 3 状態の決定性有限オートマトンを求め，状態遷移図で示せ。

(c) L を生成する文法を $G=<\{S,A,B\},\{a,b\},P,S>$ とする。このとき，問い (b) で求めた決定性有限オートマトンからG の書き換え規則（生成規則）の集合 P を求めよ。また文法 G の最も適切な名称を答えよ。

（2）　図 3 の状態遷移図は，語 $w\in\{w|0,1$ からなる長さ 1 以上の文字列$\}$を入力とし，テープ上の入力をひとつ右シフトし先頭に 0 を追加するチューリング機械 TM を表している。例えば，101が入力として与えられるとき，テープ上で "$\cdots B¢101\$B\cdots$" が "$\cdots B¢0101\$B\cdots$" に書き換えられて停止する。なお，¢,\$ はそれぞれ左端および右端のエンドマーカであり，テープの空白部分は空白を表す記号Bで埋められているとする。この TM に関する以下の問い(a)～(d)について答えよ。

(a) 図 3 の TM を正しく動作させるために図中の空欄 $(i),(ii),(iii)$ を埋めて状態遷移図を完成させよ。なお，解答は図中の他の状態遷移関数と同じ形式で答えること。

(b) ある時点でのチューリング機械の様子を，状態，テープの内容，ヘッド位置の 3 つで表したものを様相(configuration)と呼ぶ。TMの動作に関して，テープ上で "$\cdots B¢101\$B\cdots$" が "$\cdots B¢0101\$B\cdots$" に書き換えられるまでの様相の系列を考える。以下の空欄 (A) に適切な様相の系列が入っているとき，最終様相から 2 つ前（最終様相の前の前）の様相を答えよ。なお様相において $\overline{x}$ はテープ上の x にヘッドがあることを表す。

初期様相 $(q_S,¢\overline{1}01\$)\vdash(q_1,¢0\overline{0}1\$)\vdash$ 空欄 (A) $\vdash(q_F,¢\overline{0}101\$)$ 最終様相

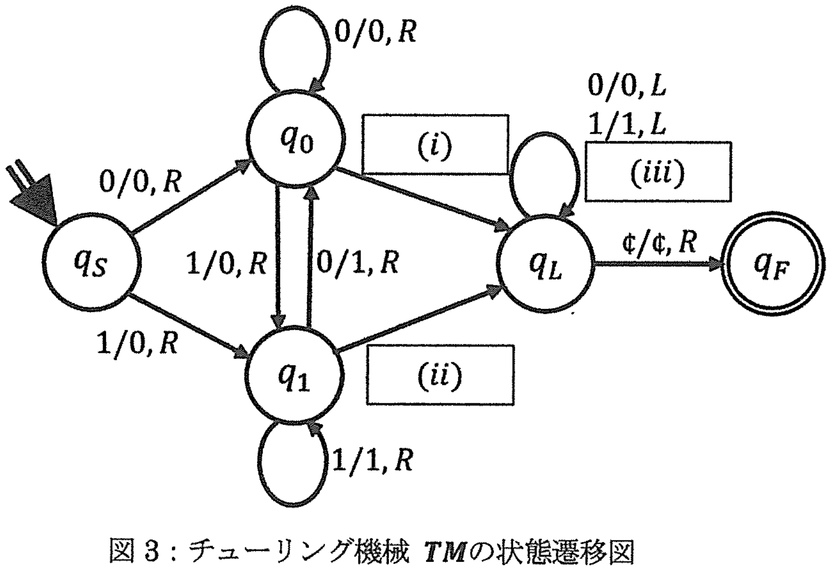

図 3：チューリング機械 TMの状態遷移図

(c) 図 3 の$(i),(ii),(iii)$が正しく埋められた TM に動作関数をひとつ追加することで入力に空文字列を許すよう変更したい。つまりテープ上に“¢\$”が書かれているとき“¢0\$”に書き換えたい。この変更のために追加すべき動作関数（状態遷移関数）を答えよ。ただし，空文字列を入力として与えた際の初期様相は $(q_s, \text{¢}\bar{\$})$ とする。なお動作関数は，例えば図 3 における状態 q_s から q_0 への動作関数は $\delta(q_s, 0) = (q_0, 0, R)$ と書くものとし，これと同じ形で答えを書くこと。

(d) TM に対して長さ n の 0, 1 からなる文字列を入力として与えた場合に，初期様相からTM が停止するまでのヘッドの移動回数を n の式で答えよ。

（3） 以下の(a)～(e)の文章について，誤っているものは×と答えるとともにその理由を簡潔に答え，正しいものは○とだけ答えよ。

(a) 非決定性プッシュダウンオートマトンで識別可能だが決定性プッシュダウンオートマトンでは識別不可能な言語が存在する。

(b) 文脈自由文法の形式で与えられた文法により生成されるどんな言語も，それを識別可能な有限オートマトンは存在しない。

(c) 文脈自由言語は句構造言語の一種である。

(d) 状態数がn個の決定性有限オートマトンが受理できる言語は，長さn以下の語のみからなる。

(e) ある言語において，正規言語に関するポンピング定理（pumping lemma，繰り返し定理，反復補題などとも呼ばれる）が成り立てば，それは正規言語である。

問題 15　計算機ハードウェア　設問についてすべて解答すること。

I　数値表現に関する以下の問い（1）～（4）に答えよ。ただし，括弧付きで示した添え字の数字は基数を表す。

（1）次の 2 の補数表現された 2 進数を 10 進数に変換せよ。

(a) $0110\ 1011_{(2)}$　　　　(b) $1001\ 0100_{(2)}$

（2）次の 10 進数を 2 の補数表現された 8 桁の 2 進数に変換せよ。

(a) $-5_{(10)}$　　　　(b) $-19_{(10)}$

（3）次の 10 進数を 10 の補数表現された 4 桁の 10 進数に変換せよ。

(a) $-99_{(10)}$　　　　(b) $-365_{(10)}$

（4）次の 2 の補数表現された 2 進数の計算を行い，答えを 16 進数で書け。

(a) $0100\ 1110\ 1011_{(2)} - 1101\ 1010\ 1101_{(2)}$

II　2 進カウンタと 5 進カウンタを用いて，そろばんを模した 10 進カウンタを設計する。次の（1）～（4）の問いについて答えよ。なお，論理変数 A の否定を $\overline{A}$ で表す。

設計するカウンタは 4 つのフリップフロップ $FF_i (i = 0, 1, 2, 3)$ からなり，クロック入力 CK_{all} の数をカウントする。各フリップフロップの出力を $Q_i (i = 0, 1, 2, 3)$ とすると，カウンタの状態は表 1 のように遷移する。

表 1: 設計する 10 進カウンタの遷移表

CK_{all} 入力個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_3	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
Q_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
Q_1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
Q_0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0

今，FF_2, FF_1, FF_0 により同期式 5 進カウンタを構成し，FF_3 により同期式 2 進カウンタを構成する。各フリップフロップは図 1 のように入力 T, CK，出力 $Q, \overline{Q}$ から構成されるポジティブエッジ T フリップフロップであり，表 2 のような入出力特性を持つとする。ここで，ある時刻の出力を Q としたとき，クロック CK の次の立ち上がり直後の出力を Q^n とし，記号 $*$ は don't care を表す。なお，以降の各問いにおいても，don't care として $*$ を用いること。

また，全てのフリップフロップにはクロック入力として同じ CK_{all} が入力される。

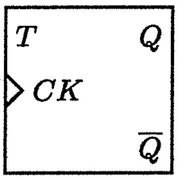

図 1: ポジティブエッジ
Tフリップフロップ

表 2: 入出力特性

CK	T	Q^n
0	$*$	Q
$\uparrow$	0	Q
	1	$\overline{Q}$

（1） まず，同期式5進カウンタを設計する。カウンタの出力をフリップフロップの出力 Q_2, Q_1, Q_0 とし，フリップフロップの入力を T_2, T_1, T_0 とすると，このカウンタはクロック入力 CK_{all} に同期して遷移し，その状態遷移表は表3のようにかける。解答用紙の同表をすべて埋めて状態遷移表を完成せよ。

（2） T_2, T_1, T_0 それぞれについて Q_2, Q_1, Q_0 を入力とするカルノー図を解答用紙の空欄を埋めることで完成せよ。カルノー図の各要素は0,1または $*$ とし，簡単化の様子が分かるように，カルノー図内に枠で囲み明示すること。

（3） T_2, T_1, T_0 それぞれについて，もっとも簡単化した論理関数を示せ。

（4） 同期式2進カウンタは，同期式5進カウンタの値が $(Q_2, Q_1, Q_0) = (1, 0, 0)$ から $(Q_2, Q_1, Q_0) = (0, 0, 0)$ に遷移する回数をカウントすればよい。同期式2進カウンタの出力を Q_3，入力を T_3，クロック入力を CK_{all} とするとき，T_3 をもっとも簡単化した論理関数で示せ。

表 3: 同期式5進カウンタの状態遷移表の一部

Q_2	Q_1	Q_0	$Q_2{}^n$	$Q_1{}^n$	$Q_0{}^n$	T_2	T_1	T_0
0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1						
1	1	1	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

III　図2のCコードをMIPSコンパイラでコンパイルしたところ，図3のアセンブリコードが得られたとする。

```
for( int i = 1; i <= n; i++ )
    a[i] = a[i] * x + b[i] * y + c[i];
```

図 2: C コード

行番号	ラベル	opcode	オペランド	意味
1	LOOP:	addi	$s2, $s2, 4	($s2 の値と即値 4 の和を $s2 に格納)
2		lw	$t2, 0($s2)	(メモリアドレス $s2 に格納されている値を $t2 に転送)
3		addi	$s1, $s1, 4	
4		lw	$t1, 0($s1)	
5		addi	$s0, $s0, 4	
6		lw	$t0, 0($s0)	
7		mul	$t0, $t0, $t4	
8		add	$t0, $t0, $t2	
9		mul	$t2, $t1, $t5	($t1 の値と$t5 の値の積を$t2 に格納)
10		add	$t1, $t0, $t2	($t0 の値と$t2 の値の和を$t1 に格納)
11		sw	$t1, 0($s1)	($t1 の値をメモリアドレス $s1 に転送)
12		addi	$t3, $t3, −1	
13		bne	$t3, $zero, LOOP	((a))

図 3: アセンブリコード

なお，$ から始まるオペランドはレジスタを表し，$zero は常に値 0 が格納されている特殊なレジスタである。また，配列変数 a，b，c の各要素は 4 バイト（＝1 ワード）の大きさを持つ。

（1）以下の問いに答えよ。ただし命令パイプラインの段数は十分多いものと仮定する。

(a) 空欄 (a) の説明を埋めよ。

(b) プログラム開始時点で，$s0, $s1, $s2, $t3 に保持されている値について，図2のCコード中で使用されている変数名を用いてそれぞれ説明せよ。

(c) 変数 x, y の値を格納する用途に用いられているレジスタはどれか，それぞれ答えよ。

(d) ここで，以下の3種類の命令間依存について考える。

- 真のデータ依存であるフロー依存（Read after Write 依存）
- 偽のデータ依存である逆依存（Write after Read 依存）
- 偽のデータ依存である出力依存（Write after Write 依存）

図3のアセンブリコードで示された1回分のイテレーションの中で，9行目の mul 命令はどの先行命令に依存しているか，上記3種類の依存それぞれについて，依存先の命令を答えよ。なお，解答は図3内の行番号で行うこと。

(e) 図3のアセンブリコードで示された1回分のイテレーションに相当する命令列の中に，フロー依存が何か所存在するか答えよ。

(f) いま $n=2$ であるとし，図 3 のアセンブリコードで示された 2 回分の 26 命令が実行されるとき，イテレーションをまたいで存在するフロー依存は何か所あるか答えよ。

（2）次に，図 3 のアセンブリコードを 2 本の命令パイプラインで並列実行するにあたり，1 回のイテレーションを構成する 13 命令を静的スケジューリングすることを考える。その際，以下の前提を設ける。

- 最大 2 命令が同時実行可能である
- イテレーションをまたいだ命令間依存については考慮しなくてよい
- 演算器の数やメモリポートの数といった，資源制約については考慮しなくてよい
- メモリを介した命令間依存については考慮しなくてよい

(g) 命令間に依存がなく，それらを同時実行あるいは逆順実行できるような並列性をなんと呼ぶか。英字 3 字の略語で答えよ。

(h) 2 本の命令パイプラインで命令を実行するために，同時実行可能な命令を順にグループ化していくことを考える。以下の条件を仮定した場合，図 3 の全 13 命令は，最小で何グループで構成できるか。

- 図 3 に示されたプログラム順を基準として命令間の実行順序の逆転は許さないものとする
- 各グループは，1 つもしくは 2 つの同時実行可能命令を含むことができるものとする

(i) 逆依存および出力依存は，使用するレジスタを変更することで解消できる。いま，問い (h) と同じ条件のもと，使用するレジスタを変更してよい場合，図 3 の全 13 命令は最小で何グループで構成できるか答えよ。ただし使用できるレジスタ数には限りがないと仮定してよい。

(j) 問い (i) と同じ条件のもと，命令間の実行順序の逆転を許した場合，図 3 の全 13 命令は最小で何グループで構成できるか答えよ。

問題 16　情報数学　設問すべてについて解答すること。

I　時刻 $t=1,2,\ldots$ において情報アルファベット $A=\{0,1\}$ を出力する定常な 2 重マルコフ情報源 S を考える。確率変数 $X_t \in A$ は情報源 S の時刻 t における出力を表し，任意の時刻 t における遷移確率 $P(X_t=x \mid X_{t-1}=y, X_{t-2}=z)=P_{x|yz}$ は以下で与えられる。

$$P_{0|00}=a,\ \ P_{0|01}=\frac{1}{2},\ \ P_{0|10}=\frac{1}{3},\ \ P_{0|11}=\frac{1}{3}$$

ただし，$0<a<1$ とする。次の（1）～（7）の問いについて答えよ。導出過程も簡潔に示すこと。解答においては可能な限り，2 元エントロピー関数 $h(p)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)$ を用いて表記し，分数に対しては既約形，対数に関しては最も簡単な形（例：$\log_2 6 \to 1+\log_2 3$）に変形すること。また，$0\log_2 0=0$ とする。

（1）エントロピー $H(X_t \mid X_{t-1}=1, X_{t-2}=0)$ を求めよ。

（2）エントロピー $H(X_t, X_{t-1} \mid X_{t-2}=1, X_{t-3}=0)$ を求めよ。

（3）情報源 S のシャノン線図（状態遷移図）を描け。ただし，シャノン線図は以下のような表記に従うこと（下図は，状態 A から出力シンボル x を確率 P_x で出力し，状態 B へ遷移する場合を表す）。

$$\textcircled{A} \xrightarrow{x\,/\,P_x} \textcircled{B}$$

（4）エントロピー $H(X_t)=1$ となるときの a の値を求めよ。

（5）（4）のときのエントロピー $H(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2})$ を求めよ。

（6）（4）のときの相互情報量 $I(X_t\,;\,X_{t-1}, X_{t-2})$ を求めよ。

（7）情報源 S が 1 重マルコフ情報源で表現可能であるとき，a の値を求めよ。また，そのときの 1 重マルコフ情報源における遷移確率 $P(X_t \mid X_{t-1})$ を求めよ。

II　以下の論理式（a）～（d）のうち，恒真であるもの，充足可能であるもの，恒偽であるものをそれぞれ全て答えよ。存在しない場合は「なし」と答えよ。なお，p,qは命題記号であり，Pは命題関数（述語）である。

（a）$p \to \neg(p \land q)$　（b）$p \land \neg p \to q$　（c）$\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$　（d）$\forall x\, \neg P(x) \leftrightarrow \exists x\, P(x)$

III　関数f,g,hが以下のように定義される関数である。また，$\mathbb{N}$ は自然数の集合$\{0,1,2,\ldots\}$ とし，$n \in \mathbb{N}$ とする。

関数$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,　$f(x) = (x, x+n)$

関数$g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,　$g(x,y) = (y, nx)$

関数$h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,　$h(x,y) = nx + y$

このとき，次の（1），（2）の問いに答えよ。

（1）$n = 2$とするとき，f, g, h, $f \circ h$, $g \circ f$, $h \circ f$の６つの関数のうち単射であるもの，全射であるもの，全単射であるものをそれぞれ全て答えよ。なお，そのような関数が存在しない場合は「なし」と答えよ。

（2）nを変えることで，(i) gが単射になる場合と，(ii) gが全射になる場合と，(iii) gの逆関数が存在する場合がある。(i)～(iii)のそれぞれの場合について，nが満たすべき条件を答えよ。

IV　集合S は，以下のように再帰的に定義される。このとき，次の（1）～（4）の問いに答えよ。

初期ステップ：$\{a,b,c\} \in S$

再帰ステップ：$Y \in S \land X \subset Y \Rightarrow X \in S$

（1）Sを，外延的表記（集合の要素を書き下す表記）で書け。

（2）Rは，上記の集合Sを用いて以下のように定義される半順序関係である。

$R = \{(X,Y) \mid X, Y \in S \land X \supseteq Y\}$

このとき，半順序集合(S,R)のハッセ図を描け。

（3）上記(S,R)の部分集合のうち，全順序集合であり，$\{b\}$を要素として持ち，要素数が最大となる集合が２通りある。その２つの全順序集合を，それぞれ外延的表記で書け。

（4）上記(S,R)の部分集合$A = \{\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$について，$A$の最大元，最小元，上界，下界，上限，下限を答えよ。なお，存在しない場合は「なし」と答えよ。

問題17　微分積分・線形代数　設問すべてについて解答すること。

I　関数 $f(x)=\dfrac{\log(1-x)}{1-x}$ について，次の (1) ～ (5) の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=\log(1-x)$ の第 n 次導関数 $g^{(n)}(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ を求めよ。

(3) 次の等式を示せ。

$$(1-x)f^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)=\frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}\ (n=1,2,3,\ldots)$$

(4) $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ とおく。数列 $\{a_n\}$ の一般項を S_n を用いて表せ。ただし $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ とする。

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(x+\frac{3}{2}x^2+f(x)\right)$ を求めよ。

II　行列

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -6\\ 1 & 6 & a\\ -2 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

について，次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) $a=3$ のとき，A の固有値を求めよ。

(2) $a=3$ のとき，A の固有ベクトルを求めよ。

(3) $a=3$ のとき，A が対角化可能であるかどうかを調べ，対角化可能であれば対角化せよ。

(4) 次の条件をみたす実数 a の範囲を求めよ。

A の固有値はすべて実数であり，かつ A は対角化可能である。

問題 18　数理科学 1　設問すべてについて解答すること。

I　複素関数

$$f(z) = e^{1/z}$$

について，次の (1) 〜 (4) の問いに答えよ。

(1) $z = \dfrac{3}{5\pi}(2+i)$ のとき，$f(z)$ の値を $x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の形で表せ。

(2) $z = 2$ における $\dfrac{f(z)}{(z-2)(z-3)^2}$ の留数を求めよ。

(3) 閉曲線 $C : z = 3 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対し，積分 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-2)(z-3)^2}\,dz$ の値を求めよ。

(4) ローラン展開を利用して，$z = 0$ における $\dfrac{f(z)}{1-z}$ の留数を求めよ。

II　次の (1) 〜 (4) の問いに答えよ。

(1) 変数分離形の常微分方程式

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2}v^2 + v = 0$$

の解 $v(x)$ で初期条件 $v(0) = 1$ をみたすものを求めよ。

(2) $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ とし，(1) で求めた v を用いて関数 $u(t,x) = v(x-t)$ を定める。このとき $\alpha(t) = \displaystyle\lim_{x\to\infty} u(t,x)$ および $\beta(t) = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} u(t,x)$ を求めよ。

(3) (2) で定めた関数 u が次をみたすことを示せ。

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2) - \partial_{xx}u = 0$$

ただし $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{xx} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ である。

(4) 次の条件をみたす関数 $w(t,x)$ が無限個存在することを示せ。ただし，$\alpha(t)$, $\beta(t)$ は (2) で求めたものとする。

$$\begin{cases} \partial_t w + \dfrac{1}{2}\partial_x(w^2) - \partial_{xx}w = 0, \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} w(t,x) = \alpha(t), \quad \lim_{x\to-\infty} w(t,x) = \beta(t) \end{cases}$$

問題 19　数理科学 2　設問すべてについて解答すること。

I　$n\ (\geq 4)$ は整数，$C\ (\neq 1)$ は実数とする。$1 \leq i < j \leq n$ をみたす整数の各組 (i,j) に対し，ベクトル $v_{ij} \in \mathbb{R}^n$ の第 i 成分と 第 j 成分は C，それ以外の成分は 1 であるとする。$1 \leq i < j \leq n$，$1 \leq k < l \leq n$，$(i,j) \neq (k,l)$ のとき，$\langle v_{ij}, v_{kl} \rangle$ の絶対値は i,j,k,l によらずに一定値であると仮定する。ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積である。このとき，次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) $n=4$ のとき C の値を求めよ。

(2) 一般に n を C の式で表せ。

(3) C が整数であるような (n,C) の組をすべて求めよ。

(4) $n=8$ とし，ベクトルの組 $\{v_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8\}$ で生成される $\mathbb{R}^8$ の部分空間を V とする。$\dim V \leq 7$ を示せ。

II　次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ (ただし $\boldsymbol{c} \neq (0,0)$) に対して，2変数関数 $F(x_1,x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ を考える。関数 $F(x_1,x_2)$ が極値をもたないことを示せ。

(2) 条件 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ のもとで，(1) で定義された関数 $F(x_1,x_2)$ は $(x_1,x_2) = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}$ において極大値 $\|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ をとることを示せ。

(3) 変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値 C^1 級関数とする。関数 $f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ における ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ に沿った方向微分を

$$\frac{df}{d\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})\Big|_{t=0} \quad \left(= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \right)$$

と定義する。 また $f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ を

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) \right)$$

と定義する。このとき $\dfrac{df}{d\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{v}, \nabla f(\boldsymbol{a}) \rangle$ を示せ。ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積である。

(4) 方向微分 $\dfrac{df}{d\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ を集合 $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v}\| \leq 1\}$ 上で最大化するベクトル $\boldsymbol{v}$ が，勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ 方向の単位ベクトルで与えられることを示せ。ただし $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq (0,0)$ と仮定する。