2025 年度(令和 7 年度)

前　期　日　程

数　　学 (120 分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は，1ページから4ページまであります。解答用紙は，$\boxed{\text{前 1}}$，$\boxed{\text{前 2}}$，$\boxed{\text{前 3}}$，$\boxed{\text{前 4}}$ の4枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて，各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお，解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って，すべての解答用紙の該当欄に志望学科名(社会工学科を志望するものは志望分野名，創造工学教育課程を志望するものは志望コース名)及び受験番号(2か所)を記入しなさい。
5. 解答用紙の網掛け部分及び※を付した欄には，何も記入してはいけません。
6. 問題冊子の白紙と余白は下書きに適宜利用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 曲線 $C : y = e^x$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ をとり，点 P における C の法線を ℓ とする。P とは異なる C 上の点 $(s,\ e^s)$ における C の法線を ℓ_s とする。ℓ と ℓ_s の交点の座標を $(x_s,\ y_s)$ とし，

$$x(t) = \lim_{s \to t} x_s, \quad y(t) = \lim_{s \to t} y_s$$

と定める。

(1) x_s を s, t を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x), g(x)$ は $x = a$ で微分可能で，$g'(a) \neq 0$ とする。極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

を $f'(a)$，$g'(a)$ を用いて表せ。

(3) $x(t), y(t)$ を t を用いて表せ。

(4) 点 $(x(t),\ y(t))$ を中心とし，点 P を通る円の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ c は定数とする。数列 $\{a_n\}$ は次をみたす。

- $a_1 = 1$
- 第 n 部分和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ について，

$$nS_n = n + (c+1)(S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}) \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$$

が成り立つ。

(1) $S_2,\ S_3$ を求めよ。

(2) $a_2,\ a_3$ を求めよ。

(3) $n \geqq 2$ とする。$nS_n - (n-1)S_{n-1}$ を 2 通りに計算することにより，na_n を $c,\ S_{n-1}$ を用いて表せ。

(4) $n \geqq 2$ とする。a_n を $c,\ n,\ a_{n-1}$ を用いて表せ。

(5) c が自然数のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(6) c が負の整数のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

3 $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$ の三角形 OAB がある。$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と辺 AB の交点を C とする。また，三角形 OAC の外心 E は辺 OB 上にある。$\mathrm{OE} = R$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

(1) AC を R を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 点 O から直線 AB に垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

4 xy 平面上に放物線

$$C_1:\ y = x^2 - (\sin\theta)\,x + \sin 2\theta$$

と直線

$$C_2:\ y = (2\cos\theta)\,x$$

がある。ただし，θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ をみたす。

(1) C_1 と C_2 が接するとき，接点の x 座標，y 座標それぞれの値を求めよ。

(2) C_1 と C_2 が接するときの θ の値を θ_0 とする。$\theta_0 < \theta \leqq \pi$ のとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) θ_0 は (2) で定めた値とする。$\theta_0 < \theta \leqq \pi$ の範囲で θ の値を変化させる。(2) で求めた $S(\theta)$ が最大値をとるときの θ の値を θ_1 とする。$\cos\theta_1$ と $S(\theta_1)$ を求めよ。

(4) C_1 と C_2 の共有点の x 座標を $a, b\ (a \leqq b)$ とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で θ の値を変化させるとき，点 $(a,\ 2a\cos\theta)$ の軌跡が囲む部分の面積 T を求めよ。