

問題 1 1 材料物理 設問すべてについて解答すること。

I 周期境界条件を適用した 1 辺が L の金属立方体 (体積 $V = L^3$) を考える。温度 $T = 0$ [K] において、この中に N 個の電子を入れると、エネルギーの最も低い量子状態から順に電子が席を埋めていき、最後に最も高いエネルギー E_F の状態が占められる。一方、 k_x , k_y , k_z のベクトル空間 (\vec{k} 空間) で考えると、量子状態は点で表現され、1 辺が $2\pi/L$ の立方体に 1 個の量子状態が存在する。 \vec{k} 空間のそれぞれの立方体には、スピン縮退を考慮すると 2 個の電子が収容され、系が最低のエネルギーとなるのは、半径 k_{\max} の球内に電子を詰めた場合である。これに関連して、次の (1) ~ (4) の問いについて答えよ。必要に応じ、電子の質量を m , プランク定数を h ($\hbar = h/2\pi$) として解答せよ。

(1) 一般に k_{\max} を何というか答えよ。

(2) k_{\max} を電子数密度 n ($n = N/L^3$) の関数として表せ。

(3) k_{\max} と E_F の間に成り立つ関係を式で表せ。

(4) 単純立方晶の 2 価金属の場合、 \vec{k} 空間上の $E(\vec{k}) = E_F$ で定義される曲面は、第 1 ブリュアンゾーンからはみ出し、第 2 ブリュアンゾーンに進入することを示せ。

II 希土類磁石の一般的な製造法は、合金素材をジェットミル等の手法で単磁区粒子の粉末原料にし、これを磁場中で圧縮成型した後、その成型体を焼結して製品を製造する粉末冶金法である。これに関連して、次の (1) ~ (4) の間に答えよ。

(1) 代表的な希土類磁石の名称を 2 つ記せ。

(2) 一軸異方性の単磁区粒子について、外部磁場 H と容易軸のなす角度を θ としたとき、 $\theta = 0^\circ$ (または 180°) ならびに $\theta = 90^\circ$ の磁化曲線の概略を描け。

(3) 磁化 I_S と容易軸のなす角度を φ とする。外部磁場 $H = 0$ のとき、 I_S は容易軸と平行 ($\varphi = 0^\circ$) にある。ここから、 H を $\theta = 180^\circ$ 方向に印可したとき、 I_S が反転する磁場の大きさ (保磁力 H_C) を求めよ。ただし、磁性体は単磁区粒子であり、結晶磁気異方性定数が K_u の一軸異方性である。

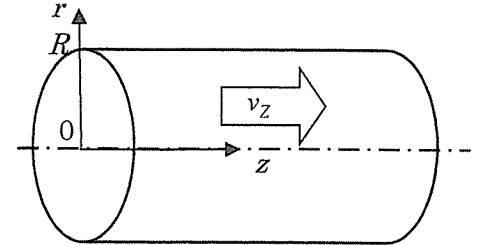
(4) 一般的に、製造された希土類磁石の保磁力は、(3) で予測された保磁力よりも小さい。その理由を説明せよ。

問題 1 2 材料プロセス工学 設問すべてについて解答すること。

I 水平円管内を流体が流れているときの定常流速分布を求めるため、ナビエ・ストークスの式を簡略化して以下の式を得た。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{\mu L}$$

ここで、 μ は粘性係数、 $\Delta P/L$ は単位長さあたりの圧力損失を表す。次の (1) ~ (2) の問いに答えよ。



(1) 次の境界条件を用いて、円管内の速度分布を求めよ。

$$r=0: dv_z/dr=0$$

$$r=R: v_z=0$$

(2) 円管断面内の流速が最高流速となるのはどの位置か、またそのときの流速の値を示せ。

II 空気中に吊るされている直径 d_p の球形状の固体のナフタレンの昇華について、次の (1) ~ (2) の問いに答えよ。

(1) 昇華したナフタレンは静止した空気中を拡散していく。ナフタレンは球形であるので、球座標系における一次元拡散となる。この場合の拡散方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial P_A}{\partial t} = \frac{D_{AB}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P_A}{\partial r} \right)$$

ここで、 P_A はナフタレンの分圧、 t は時間、 D_{AB} は空気中のナフタレンの拡散係数、 r は半径方向の座標を表す。

今、定常状態を仮定する。固体表面 ($r = d_p/2$) および空気本体 ($r = \infty$) のナフタレンの分圧をそれぞれ P_{AS} 、 $P_{A\infty}$ として拡散方程式を解け。

(2) ナフタレン表面 ($r = d_p/2$) における拡散流束 J_A を求めよ。なお、昇華したナフタレンは理想気体とみなす。

III 多くの工業プロセスでは、酸化、還元、燃焼などのガス-固体粒子間反応が主要な役割を占めることが多い。例えば、石炭の燃焼は火力発電所における重要な反応である。1000K 以下では、石炭等の球形状の炭材と酸素との燃焼反応の速度式は以下の式で表されると考えられる。

$$1 - (1 - \alpha)^{1/3} = kt / \rho r_0$$

ここで、 α は反応率、 k は速度定数、 r_0 は初期の球形粒子の半径、 ρ は粒子の密度を表す。次の (1) ~ (3) の問いに答えよ。

(1) 上記の速度式の名前を答えよ。

(2) いま、1 個の粒子を 10 個に分割して反応させた場合、反応時間は何倍になるか求めよ。ただし、速度定数は分割しても変わらないとし、分割後の粒子形状も球形であるとする。

(3) 800K と 900K における速度定数 k がそれぞれ 0.01m/s と 0.64m/s であった。この場合、反応の活性化エネルギーを求めよ。ただし、気体定数は $R=8.3\text{J/mol}\cdot\text{K}$ 、 $\ln 2=0.69$ とする。

IV 反応が n 次反応の場合について、反応速度式は以下のように書ける。

$$-\frac{dC_A}{dt} = kC_A^n$$

ここで、 C_A は反応物のモル濃度、 k は反応速度定数である。次の (1) ~ (3) の問いについて答えよ。

- (1) 上式を積分して、速度式の積分形を示せ。ただし、 $t=0$ で $C_A=C_{A0}$ とする。
- (2) 半減期の一般式を示せ。
- (3) 速度式の両辺の対数をとると、次式のようなになる。

$$\ln\left(-\frac{dC_A}{dt}\right) = \ln k + n \ln C_A$$

下表のデータから、この反応の反応次数 n と反応速度定数 k を求めよ。

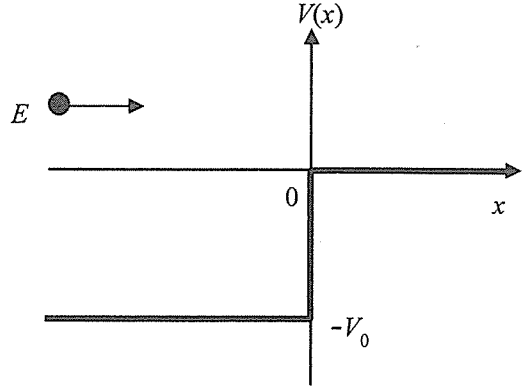
$\ln C_A$	$\ln(-dC_A/dt)$
0.69	-1.62
1.39	-0.22
1.94	0.88
2.30	1.60

問題 13 量子力学 設問すべてについて解答すること。

I 以下の (1)~(7) の問いに答えよ。

質量 m , エネルギー E の粒子が $x < 0$ の領域から入射し, 図に示すような 1 次元階段型ポテンシャル $V(x)$ で散乱される定常的過程を考える。ポテンシャルの値は, $x \leq 0$ で $-V_0$, $x > 0$ で 0 とする。

ここで, x は座標であり, m, E, V_0 は正の定数とする。
プランク定数を h , また $\hbar = h/(2\pi)$ とする。



- (1) $x \leq 0$ と $x > 0$ の領域の波動関数 (エネルギー固有関数) を, それぞれ, $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ とし, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

- (2) $x \leq 0$ と $x > 0$ の領域の波動関数が, それぞれ,

$$\varphi_1(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx),$$

$$\varphi_2(x) = C \exp(iax)$$

と書けるとき, 正の定数 k と a を求めよ。ただし A, B, C は定数 (複素数) である。

- (3) $x = 0$ で波動関数が満たす境界条件を $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ を用いて示せ。この境界条件から求められる定数 A, B, C の間の関係式 (連立方程式) を求めよ。解答には k および a を用いて良い。

- (4) 前問の連立方程式を使って, B と C を, それぞれ, A, k, a を用いて表せ。

一般に, 1 次元の波動関数が $\psi(x)$ と書けるとき, 流れの密度 j は以下の式で与えられる。

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right)$$

ただし, ψ^* は ψ の複素共役を意味する。

- (5) $x \leq 0$ と $x > 0$ の領域での, 流れの密度を j_1 と j_2 とする。 j_1 と j_2 を, それぞれ, A, k, a, m, \hbar を用いて表せ。

- (6) 粒子の反射率 R と透過率 T を, それぞれ, k と a を用いて表せ。

- (7) 反射率 R がゼロになるときの, V_0 の値を求めなさい。

II 以下の (1)~(8) の問いに答えよ。

1 次元の調和振動子型ポテンシャル $m\omega^2 x^2/2$ 中に束縛された質量 m の粒子の運動を考える。

ここで、 $\omega (>0)$ は角振動数、 x は座標である。 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 、 h をプランク定数とする。

(1) 定常状態でエネルギー固有値 E_n を持つ粒子の波動関数 $\psi_n(x)$ が満たす時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(2) 変数変換 $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x$ と $\lambda_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega}$ を用いて、設問 (1) の波動方程式を波動関数 $\psi_n(q)$ の波動方程式に書き換えなさい。ただし、解答に $x, m, \omega, \hbar, h, E_n$ を用いてはいけない。

調和振動子の波動関数 $\psi_n(q)$ は、 q を用いて、以下のように与えられる。

$$\psi_n(q) = C_n H_n(q) \exp\left(\frac{-q^2}{2}\right), \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

ここで、 C_n は規格化の定数、 $H_n(q)$ はエルミートの多項式と呼ばれ、以下のように書ける。

$$H_0(q) = 1, \quad H_n(q) = (-1)^n \exp(q^2) \frac{d^n}{dq^n} \left\{ \exp(-q^2) \right\}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

このとき、固有値 E_n は小さいものから順に番号 n がふられている。

(3) $n=1, 2, 3$ について、それぞれ、 $H_n(q)$ を q の多項式で表せ。

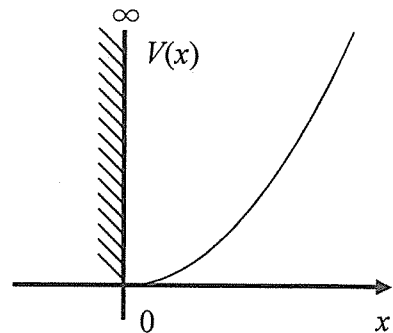
例えば、 H_1 は、 $H_1(q) = (-1)^1 \exp(q^2) \frac{d}{dq} \left\{ \exp(-q^2) \right\}$ を計算せよ。

次に、右図に示すようなポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{m\omega^2}{2} x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

の中に束縛された質量 m の粒子の運動を考える。

今、この粒子の定常状態の波動関数を $\phi_\ell(x)$ とすると、 $x \geq 0$ では $\phi_\ell(x)$ (または $\phi_\ell(q)$) は、設問 (1) (または 設問 (2)) の波動方程式と同じ方程式を満たすことが分かる。



(4) $q=0$ で波動関数 $\phi_\ell(q)$ が満たすべき境界条件を書け。

以上のことから、 $q \geq 0$ の領域で、 $\phi_\ell(q)$ は、 $\psi_n(q)$ の中で設問 (4) の境界条件を満たす関数で与えられることが分かる。番号 ℓ ($\ell=0, 1, 2, 3, \dots$) も固有値が小さいものから順にふられているとする。また $n=\ell$ でも $\phi_\ell(q)$ と $\psi_n(q)$ が必ずしも等しくないことに注意せよ。

(5) 設問 (4) の境界条件を満たす最も小さい n の値はいくつか。

(6) 基底状態の波動関数 $\phi_0(q)$ を表せ。規格化は不要である。規格化定数は定義して用いよ。

(7) 規格化した $\phi_0(q)$ を C_n を用いて表せ。

(8) これまでの結果から類推して、 $\phi_\ell(q) = \psi_n(q)$ ($q \geq 0$) となる n を ℓ を用いて表せ。

問題 1 4 電気回路・電子回路 設問すべてについて解答すること。

I 図 1 の回路において、次の (1), (2) の問いについて答えよ。ただし、抵抗 $R=1.0[\Omega]$ 、コイルのインダクタンス $L=0.4[\text{H}]$ 、コンデンサの静電容量 $C=0.1[\text{F}]$ 、直流電源の電圧 $E=20[\text{V}]$ とする。

(1) 最初に、スイッチ S は開いており、定常状態にある。このときのコイルの電流 $i_L=0$ 、コンデンサの両端の電圧 $v_C=0$ とする。そして、時刻 $t=0$ でスイッチ S を投入した。

- ① スイッチ S を投入した直後における各素子の電流 i_R , i_L , i_C の大きさを、 E , R , L , C のうち必要なものを用いて表せ。
- ② スイッチ S を投入後のコイルの電流 $i_L(t)$ を求める。 $i_L(t)$ に対する微分方程式を記せ。
- ③ 時刻 $t=0.2[\text{s}]$ におけるコイルの電流 $i_L(0.2)$ 、および、コンデンサの両端の電圧 $v_C(0.2)$ を求めよ。

(2) 次に、スイッチ S を投入してから十分時間が経過した状態にあるとする。

- ① スイッチ S を投入して定常状態にあるときの各素子の電流 i_R , i_L , i_C の大きさ、および、回路の消費電力を E , R , L , C のうち必要なものを用いて表せ。
- ② 時刻 t をあらたに定義し直し、スイッチ S を投入して定常状態にあるときから、時刻 $t=0$ でスイッチ S を開放した。コイルの電流 $i_L(t)$ に対する微分方程式を記せ。
- ③ コイルの電流 $i_L(t)$ の振幅と角周波数を求めよ。また、コンデンサの両端の電圧 $v_C(t)$ の振幅を求めよ。

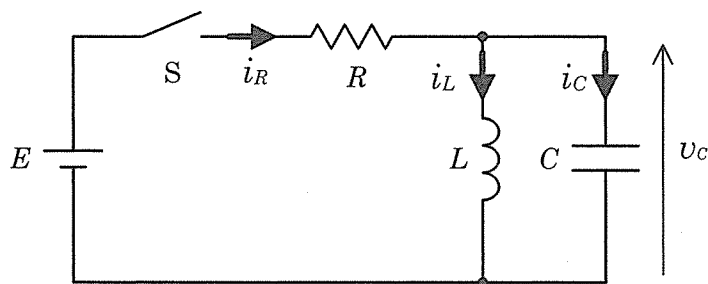


図 1

II 図2のオペアンプ回路は、GIC (Generalized Impedance Convertor) 回路と呼ばれている。図2のオペアンプ回路に関して、次の(1)～(5)の問いに答えよ。なお、導出過程も示すこと。ただし、オペアンプの特性は理想的(利得 μ は無限大, 入力インピーダンスは無限大, 出力インピーダンスはゼロ)とする。

- (1) $V_1 = V_{in}$ であり、オペアンプの特性は理想的であることを利用し、電圧 V_{in} を用いて電圧 V_3 および電圧 V_5 を表せ。
- (2) (1)の結果より、電圧 V_5 の節点に注目し、電圧 V_{in} およびインピーダンス $Z_1 \sim Z_5$ を用いて電圧 V_4 を表せ。
- (3) (1)および(2)の結果より、電圧 V_3 の節点に注目し、電圧 V_{in} およびインピーダンス $Z_1 \sim Z_5$ を用いて電圧 V_2 を表せ。
- (4) インピーダンス $Z_1 \sim Z_5$ を用いてこのオペアンプ回路の入力インピーダンス $Z_{in} = V_{in}/I_{in}$ を表せ。
- (5) 各インピーダンス $Z_1 \sim Z_5$ には抵抗またはキャパシタ(コンデンサ)が単独で用いられる。 Z_1, Z_2, Z_3, Z_5 を抵抗とし、 Z_4 をキャパシタとすると、このオペアンプ回路の入力インピーダンス Z_{in} がインダクタ(コイル)と等価になることを示せ。

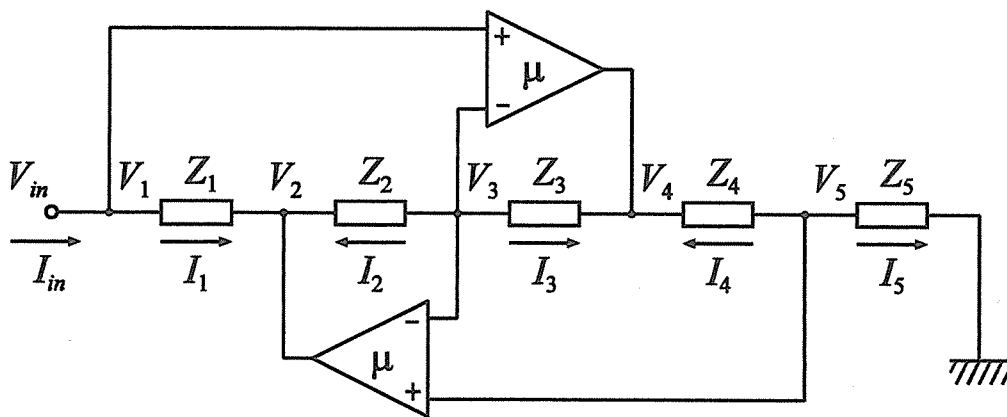
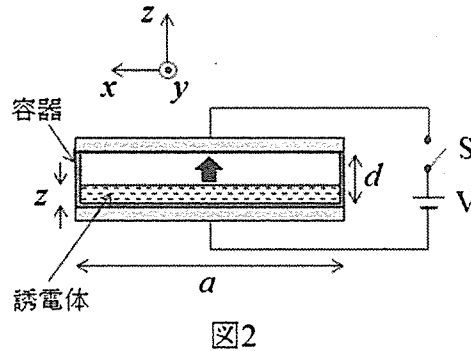
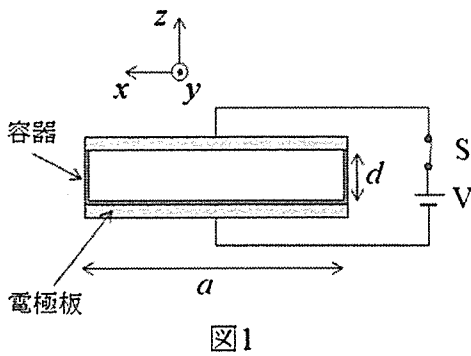


図2

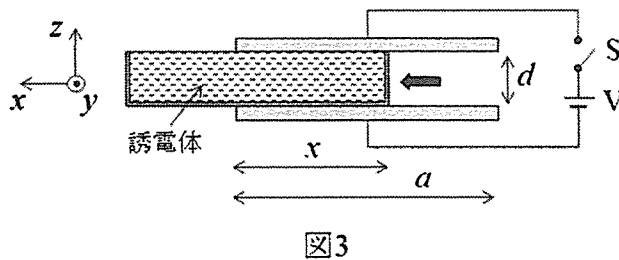
問題 15 電磁気学 設問すべてについて解答すること。

I 自由空間中に、 x 方向に長さ a 、 y 方向に長さ b の長方形の形状をした 2 枚の完全導体の電極板が、 xy 平面に平行に、 z 方向に d だけ隔てて置かれている。両電極板にはスイッチ S と電圧 V_0 の直流電源 V が直列に接続されている。この電極板間に、電極板と同一底面の容器を挿入し、この容器に比誘電率 ϵ_r の液状誘電体を注ぐ。以下の設問 (1) - (3) に答えよ。ただし、自由空間の誘電率を ϵ_0 とし、容器の厚さとその電気特性、および、電極板の端部効果の影響は無視する。

(1) 図 1 に示すように、容器が空の状態ですwitch S を導通させて、十分に時間がたった後に、スイッチ S を開放した。その後、図 2 に示すように、電極板間が埋まるまで液状誘電体をゆっくりと満たしていく。このとき、誘電体の液面の高さを z とする。電極板間における誘電体部分の電界 E_1 と、中空部分の電界 E_2 を求めよ。2 電極板間の静電容量 C_1 、電極板間に蓄えられる電界のエネルギー W_1 を z の関数 $C_1(z)$ 、 $W_1(z)$ で表せ。さらに、電極板間が埋まるまでに電極板に加わる z 方向の力の大きさ F_1 を求めよ。



(2) 図 3 に示すように、容器が完全に誘電体で充填された後、スイッチ S をいったん導通させて、十分に時間がたった後に、再び開放して、 x 方向へ容器を引き出すとき、電極板間の静電容量 C_2 、電極板間に蓄えられる電界のエネルギー W_2 を、誘電体が電極板間に含まれる長さ x の関数 $C_2(x)$ 、 $W_2(x)$ で表せ。また、引き出すときに、電極板から誘電体に作用する x 方向の力の大きさ F_2 を求めよ。



(3) 誘電体を注ぐ前 ($z=0$) と、容器を引き出した後 ($x=0$) は、共に電極板間に誘電体が入っていないが、電極板間に蓄えられる電界のエネルギーが異なる。この違いを、両者の比 $W_2(0)/W_1(0)$ で表せ。

II 静電磁場とその中の荷電粒子の運動に関する以下の設問 (1)～(6) に答えよ。

[A] 原点 O を中心とする半径 a の球に正の電荷 Q が帯電している。電荷の分布は球対称で、総電荷 Q のうち $\frac{1}{4}Q$ は表面に分布し、残りの $\frac{3}{4}Q$ は球の内部に体積分布している。また、球の内部における電場の強さは原点からの距離 r の 2 乗に比例する。この電荷分布に、球の中心を通る直線に沿って質量 m の正の点電荷 q が入射する。点電荷には電荷分布からのクーロン力のみがはたらくとし、電荷分布は点電荷からの影響を受けないものとする。電荷分布から十分離れた位置 ($r = \infty$) での点電荷の速度の大きさは v_0 、空間の誘電率は ϵ_0 である。

- (1) 点電荷が球の表面 ($r = a$) に到達するための v_0 の条件を記せ。
- (2) 球の内部における電場の強さを、原点 O からの距離 r の関数で表せ。
- (3) 点電荷が原点 O に到達するための v_0 の条件を求めよ。

[B] z 軸に沿った無限に長い導線を、 z 軸の正の向きに一定の電流 I が流れている。この電流がつくる磁場中における、質量 m の正の点電荷 q の運動について考える。点電荷は直線電流がつくる磁場による力だけを受けて運動するものとする。以下で座標系 (x, y, z) は右手系に選ぶ。空間の透磁率は μ_0 である。

- (4) 点電荷 q が (x, z) 面上で (x, z) 面内の初速度を与えられたとする。この後の点電荷の運動において、点電荷の速度の大きさが一定に保たれること、および点電荷が (x, z) 面内で運動し続けることの理由を、それぞれ記述せよ。
- (5) 点電荷 q が点 $(x, 0, z)$, ($x \neq 0$) を速度 $\vec{v} = (v_x, 0, v_z)$ で通過するとき磁場から受ける力 \vec{F} を、ベクトルの成分表示で表せ。
- (6) 点電荷 q が点 $(L, 0, 0)$ から速度 $\vec{v}_0 = (-v_0, 0, 0)$ で運動を始めた。ただし $L > 0, v_0 > 0$ である。この点電荷が直線電流に最も接近するときの直線電流からの距離を求めよ。

問題16 電子物性 設問すべてについて解答すること。

ドナーとアクセプタ（ドナー密度 N_d 、アクセプタ密度 N_a ）を両方含む p 形半導体がある。半導体にドーピングした不純物は全てイオン化しているものとする。次の（1）～（6）に答えよ。

- （1）正孔密度を求めよ。
- （2）正孔の電荷は q 、移動度は μ である。電気伝導に対する電子の寄与が無視できるとして、導電率を求めよ。
- （3）断面積 S 、長さ L の棒状の試料を用意した。試料の両端で測定したときの抵抗を求めよ。
- （4）電子密度は n であった。フェルミ準位と価電子帯上端のエネルギー差およびバンドギャップを求めよ。ただし、伝導帯の実効状態密度を N_C 、価電子帯の実効状態密度を N_V 、ボルツマン定数を k 、温度を T とする。
- （5）波長 λ 以下の光を照射したとき、価電子帯から真空中に電子を取り出すことができた。温度 T での仕事関数および電子親和力を求めよ。ただし、プランク定数を h 、光速を c とする。
- （6）温度を上げて試料が真性領域に入ったとき、電子親和力は 4.0 eV 、仕事関数は 6.5 eV であった。真空準位を基準にエネルギーバンド図を描け。ただし、エネルギーバンド図を見た時に、電子親和力、仕事関数、バンドギャップのそれぞれの値を判別できるように描くこと。伝導帯と価電子帯の実効状態密度は等しいとする。

問題 17 制御工学 設問すべてについて解答すること。

I 図1のフィードバック制御系について考える。 $R(s)$, $Y(s)$ はそれぞれ目標値 $r(t)$, 制御量 $y(t)$ のラプラス変換を表す。図1の制御系を図2の制御系に等価変換したとき、図2の中の(A)のブロックに入る伝達関数を $G_i(s)$ ($i=1, \dots, 4$) を用いて表せ。

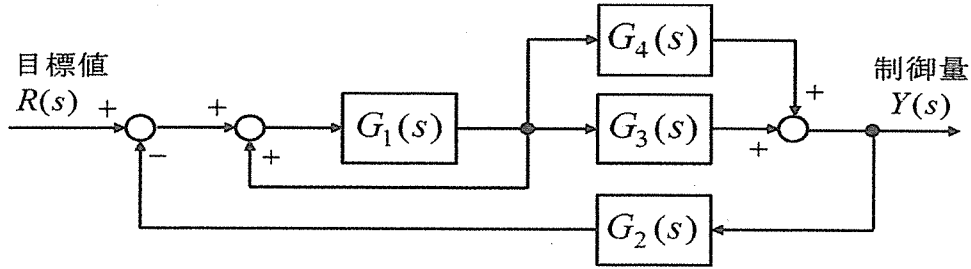


図1 フィードバック制御系

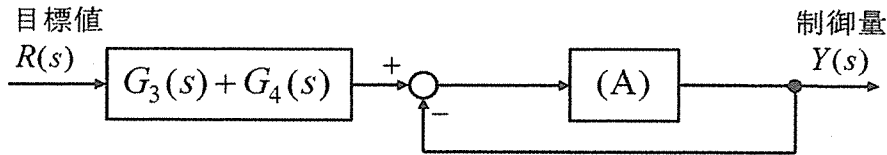


図2 等価変換後のブロック線図

II システムの伝達関数は $F(s) = \frac{as+b}{s^2+cs+d}$ であり、インパルス応答はつぎの時間関数

$$f(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right), \quad (t \geq 0)$$

であった。伝達関数 $F(s)$ の中の (a, b, c, d) の値を求めよ。

III つぎの伝達関数 $G(s)$ で表されるシステムについて考える。

$$G(s) = \frac{(s+2)^2}{2}$$

表1と表2は、いくつかの角周波数の正弦波に対するゲインと位相を調べたものである。表1と表2の中の(a)~(e)を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.30$ とする。

表1 伝達関数 $G(s)$ のゲイン

角周波数 ω [rad/sec]	0	2	∞
ゲイン [dB]	(a)	(b)	∞

表2 伝達関数 $G(s)$ の位相

角周波数 ω [rad/sec]	0	2	∞
位相 [$^\circ$]	(c)	(d)	(e)

IV 図3のフィードバック制御系について考える。 $R(s)$, $Y(s)$, $D(s)$ は、それぞれ目標値 $r(t)$, 制御量 $y(t)$, 外乱 $d(t)$ のラプラス変換を表す。

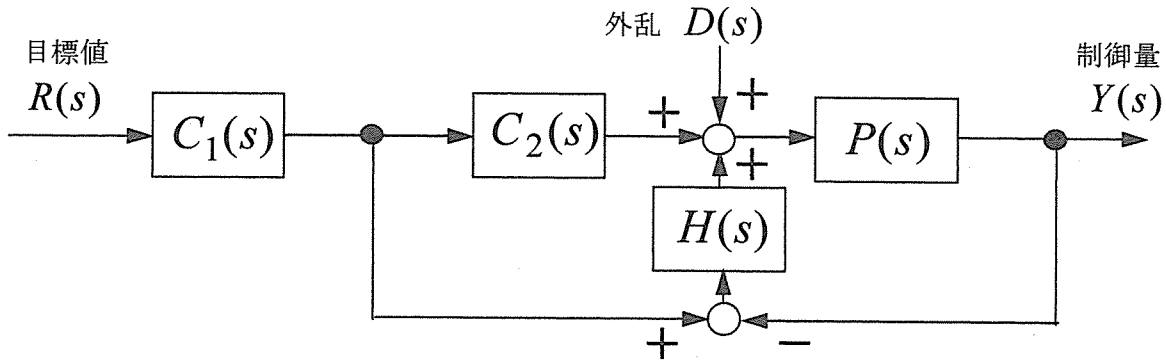


図3 フィードバック制御系

まず、図3において、つぎの(1), (2)の問いに答えよ。

- (1) $R(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。
- (2) $D(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。

つぎに、図3において $P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$, $C_1(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$, $H(s) = K_1$ とおく。 K_1 と τ は正の定数とする。つぎの(3), (4)の問いに答えよ。

- (3) 目標値 $r(t)$ を零とする。外乱 $d(t)$ が単位ステップ関数であるとき、制御量 $y(t)$ の定常値を 0.1 とする K_1 を求めよ。

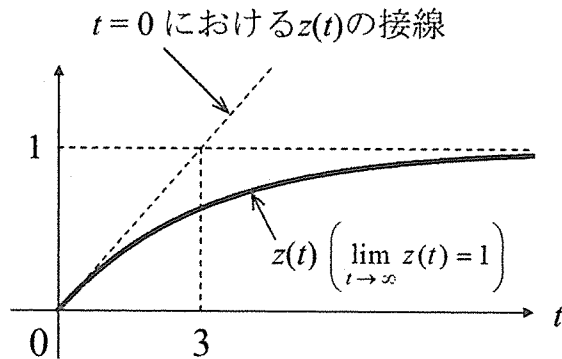


図4 1次遅れ系の単位ステップ応答波形 $z(t)$

- (4) 外乱 $d(t)$ を零とする。目標値 $r(t)$ が単位ステップ関数であるとき、任意の正の定数 K_1 に対して、制御量 $y(t)$ の応答波形を、図4に示す1次遅れ系の単位ステップ応答波形 $z(t)$ と一致させるための正の定数 τ と伝達関数 $C_2(s)$ を求めよ。

最後に、図3において $P(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$, $H(s) = \frac{K_2(s+1)}{(s+4)}$, $C_1(s) = C_2(s) = 1$ とおく。 K_2 は実定数とする。つぎの(5)の問いに答えよ。

- (5) 図3のフィードバック制御系が安定となる K_2 の範囲を求めよ。

問題 18 力学・材料力学 設問すべてについて解答すること。

I なめらかな水平面上に大きさの無視できる穴Oをあけて伸び縮みしない軽い糸を通し、水平面上にある端に質量 m の質点Aを結び、他端には質量 M の質点Bを結んで吊り下げる。穴の周辺で糸は摩擦を受けない。重力加速度を g とする。

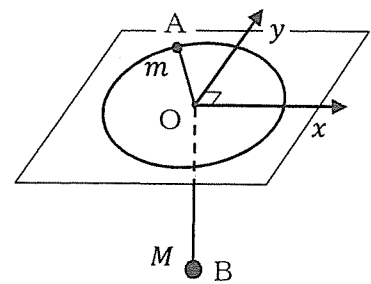


図 1

- (a) 糸がたるまない状態でOAが R になるようにBを固定し、質点Aに水平面上で速さ v_0 の円運動をさせた。このときの質点AのOまわりの角速度、角運動量、糸の張力を求めよ。
- (b) 図1のようにOを原点として水平面上に xy 軸を取る。前問の質点Aについて、時刻 t の位置ベクトルと速度ベクトルの x 成分、 y 成分を求めよ。質点Aは時刻0に座標 $(0, R)$ にあり、角速度 ω で反時計回りに運動するものとする。
- (c) Bの固定を静かにはずしたとき、Bが動かなかった。このときの R を求めよ。
- (d) この状態から糸がたるまないようにBを静かに動かし、OAが $2R$ になる位置で再び固定した。このときの質点Aの角速度はBを動かす前の角速度の何倍か答えよ。この間に運動エネルギーは K から K' に変化した。運動エネルギーの変化量 $\Delta K = K' - K$ はもとの運動エネルギー K の何倍か、符号に気をつけて答えよ。

II 太さの無視できる長さ $2L$ 、質量 $2m$ の一樣な剛体棒が点Aでピン支持され、図2-1のように、水平位置ABで静止している状態から重力（重力加速度 g ）により回転する。図2-2のように、BがAの真下にきたとき、

- (a) 剛体棒が静止した図2-1の状態から図2-2の状態へのポテンシャルエネルギーの変化量を示せ。
- (b) 図2-2のときの、剛体棒の角速度を示せ。ここで、剛体棒の点Aを通る軸に関する慣性モーメントを I_A とする。

図2-3のような太さが無視でき、直角に折れ曲がった一樣な剛体棒（質量 $2m$ ）を、O点で回転支持させた。図2-4のように θ 回転した時、

- (c) 図2-3の状態から図2-4の状態へのポテンシャルエネルギーの変化量を示せ。
- (d) 図2-4で、 $\theta = 45^\circ$ のときの、剛体棒の角速度を示せ。ここで、折れ曲がった剛体棒の点Oを通る軸に関する慣性モーメントは、 $2mL^2/3$ である。

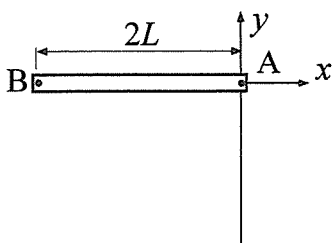


図 2-1

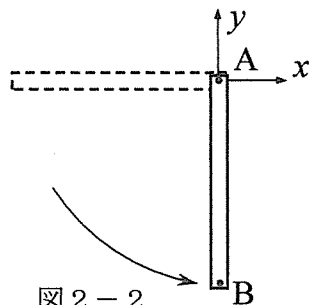


図 2-2

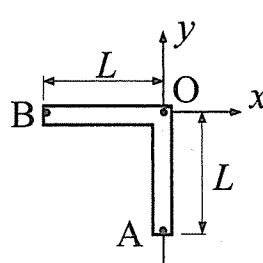


図 2-3

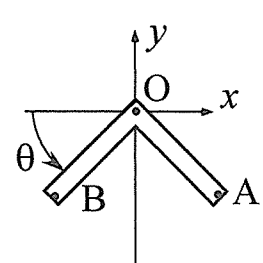


図 2-4

Ⅲ 図3のように、外直径 d 、断面二次極モーメント I_p 、横弾性係数 G の一様な、長さ $2a$ の真直な円筒棒 AC の左端 A が剛体壁に固定されている。円筒棒 AC の中央断面 B に大きさ T の右回りねじりモーメントが、右端面 C に大きさ $3T$ の左回りねじりモーメントが作用しているとき、次の (1) ~ (3) について答えよ。

- (1) AB 間、BC 間の円筒棒に働くねじりモーメントの大きさ T_1 、 T_2 を答えよ。
- (2) AB 間、BC 間の円筒棒に働くせん断応力の最大値 τ_1 、 τ_2 を、 T 、 I_p 、 d を用いて答えよ。
- (3) 右端面 C でのねじれ角 ϕ の大きさを答えよ。

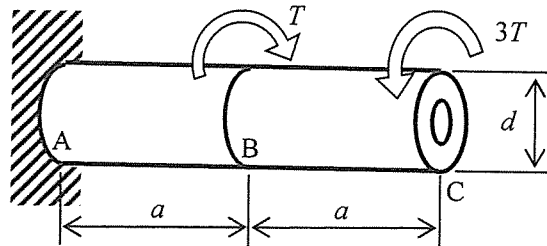


図3

Ⅳ 図4に示す長さ a 、断面二次モーメント I 、縦弾性係数 E の、真直で一様な不静定はり AB を考える。はりの左端 A を移動支点、右端 B を固定支点で支持され、左端で 0、右端で単位長さあたり w に直線的に変化する三角形分布荷重が作用するとき、次の (1) ~ (5) について答えよ。ただし、座標軸は左端 A に原点を置き、はりに沿って座標 x をとり、 x 軸に垂直に下向きに座標 y をとる。断面形状は中立軸に対して上下対称であり、はりの変形は、はりの長さに比べて十分に小さい。

- (1) 支点 A での反力を R (上向き正) として、座標 x におけるはり横断面に作用する曲げモーメント M を x 、 a 、 w 、 R を用いて答えよ。ただし M は図に示す方向を正とする。
- (2) はりの高さを h として、固定端 B でのはりの上下表面に曲げにより生じる応力の絶対値 σ_B を a 、 w 、 R 、 I 、 h を用いて答えよ。
- (3) たわみ曲線を求めるための境界条件を全て答えよ。
- (4) 支点 A での反力 R を a 、 w を用いて表せ。
- (5) 左端 A でのたわみ角 θ の大きさを答えよ。

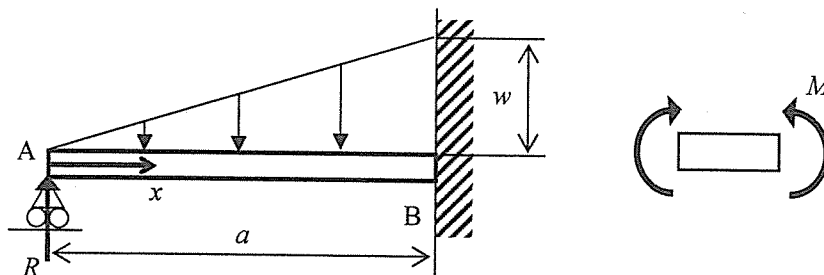


図4

問題 19 流体力学 設問すべてについて解答すること。

解答の注意：解答用紙について，設問Ⅰを表面，設問Ⅱを裏面に記入すること。また，各設問の小問について，たとえば (1) $x = y + z$ のように，最終的な解答に小問の番号を付して下線で明記すること。

Ⅰ 図1のように，タンクの中の水が，扇状の2枚の水平な平板の間から半径方向に大気中へ放出されている。タンクの上部より静かに体積流量 Q の水が供給されており，タンクの液面の高さは一定に保たれている。ここで，扇状平板の中心角と外縁部の半径と平板間距離をそれぞれ θ と R と b ，重力加速度を g ，大気圧を p_a ，水の密度を ρ とし，摩擦（損失）は無視できるものとする。次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。ただし，タンク上部の開口面積 A は扇状平板の出口の断面積 $\theta R b$ に対して十分大きく，かつ，扇状平板の出口からタンクの液面までの高さ H は平板間距離 b に対し十分に大きい ($H \gg b$) ものとする。また，扇状平板の間における鉛直方向と周方向の流れは無いものとする。

- (1) 扇状平板出口において半径方向に噴出する水の速度 v_R を， H と g を用いて表せ。
- (2) 体積流量 Q を g ， H ， θ ， R ， b を用いて表せ。
- (3) 図1のように扇状平板の中心 O から半径方向に座標 r を取り，半径 r における圧力を p_r とする。 p_r を p_a ， ρ ， g ， H ， R ， r を用いて表せ。
- (4) 2枚の扇状平板の上側の板において，半径 $R/2$ から R まで（図中の斜線部）の上面部分に大気圧によって鉛直下向きに加えられる力 F_{down} を p_a ， θ ， R を用いて表せ。
- (5) 2枚の扇状平板の上側の板において，半径 $R/2$ から R まで（図中の斜線部）の下面部分に水によって鉛直上向きに加えられる力 F_{up} を p_a ， θ ， R ， ρ ， g ， H を用いて表せ。

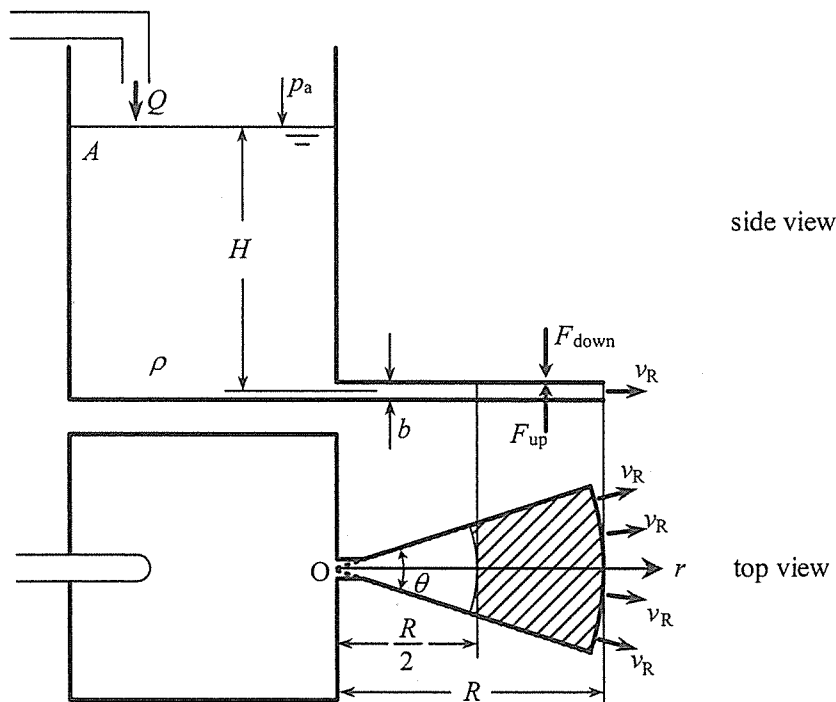


図1

II 図2のように、平行平板間を密度と粘度の異なる混じり合わない2種類の流体（液体）が平行平板の相対運動（平板面に沿った一方向の運動）によって引き起こされる2次元・定常・層流のせん断流がある。主流方向を x 、壁に垂直方向を y 、原点を下壁にとると、下壁は速度 U_1 で、上壁は速度 U_2 で移動しており、平行平板間距離を h として、2種類の流体は $y = \alpha h$ を境界としている。下層の流体の密度及び粘度を ρ_1, μ_1 、上層の流体の密度及び粘度を ρ_2, μ_2 として、次の(1)～(7)の問いについて答えよ。

- (1) せん断応力 τ と速度勾配 (dU/dy) の関係を比例定数（粘性係数 μ ）を用いて表せ。
- (2) 一般に、この関係式は何と呼ばれているか。
- (3) 長さ、質量、時間の次元をそれぞれ L, M, T としたとき、せん断応力と粘性係数の各次元を示せ。
- (4) ここで上層の流れに注目する。 $y = \alpha h$ でのせん断応力を τ_0 として、 $y = h$ (上壁) でのせん断応力を示せ。
- (5) 各層の速度分布 $U(y)$ を τ_0 を用いて示せ。
- (6) τ_0 を $U_1, U_2, h, \mu_1, \mu_2, \alpha$ を用いて示せ。
- (7) $y = \alpha h$ での速度 U を求めよ（但し τ_0 を用いてはならない）。

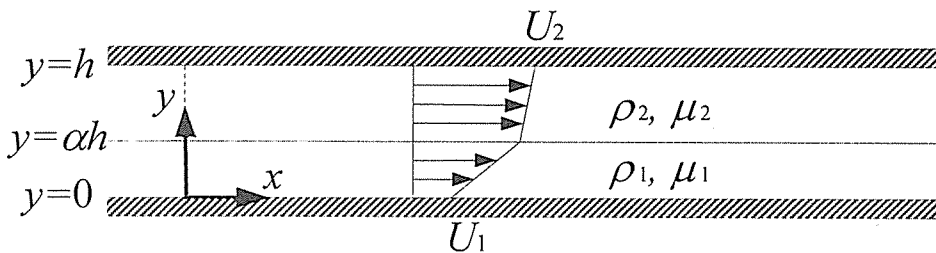


図2

問題 20 熱力学 設問すべてについて解答すること。

理想気体の状態変化（準静的過程）について考える。理想気体の状態方程式を $pV = mRT$ で表す。ここで、 p 、 V 、 m 、 R 、 T はそれぞれ圧力 [Pa]、体積 [m^3]、質量 [kg]、気体定数 [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$]、温度 [K] である。また、定積比熱 [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$]、定圧比熱 [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$]、比熱比をそれぞれ c_v 、 c_p 、 κ で表す。ただし、比熱は一定とする。また、熱の符号については、熱が系に入る場合を正、系から出る場合を負と定義し、仕事の符号については、系が仕事をする場合を正、仕事をされる場合を負と定義する。

I. 図 1 に示すように、理想気体を作動流体とする閉じた系のサイクル C ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$) とサイクル S ($1 \rightarrow A \rightarrow 3 \rightarrow B \rightarrow 1$) があり、それぞれ次の各過程で構成される。

サイクル C

- 1 \rightarrow 2 : 温度 T_0 の等温圧縮
- 2 \rightarrow 3 : 可逆断熱圧縮
- 3 \rightarrow 4 : 温度 T_H の等温膨張
- 4 \rightarrow 1 : 可逆断熱膨張

サイクル S

- 1 \rightarrow A : 温度 T_0 の等温圧縮
- A \rightarrow 3 : 等積変化 (受熱)
- 3 \rightarrow B : 温度 T_H の等温膨張
- B \rightarrow 1 : 等積変化 (放熱)

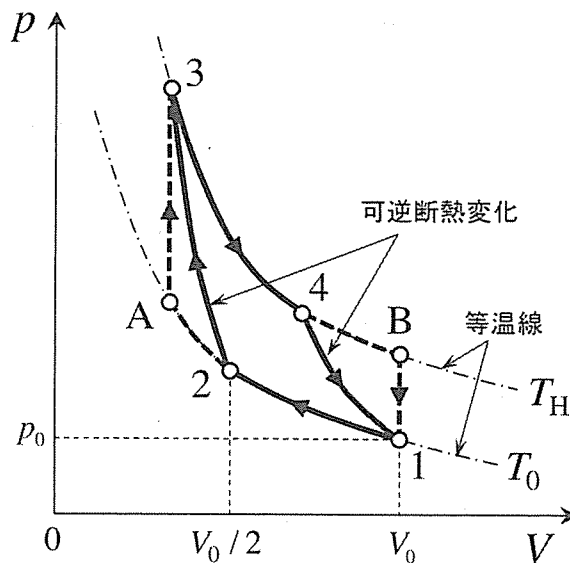


図 1 理想気体の $p-V$ 線図 (閉じた系の二つのサイクル)

点 1 における圧力、体積、温度、エントロピ [J/K] をそれぞれ p_0 、 V_0 、 T_0 、 S_0 とし、点 2 の体積を $V_0/2$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) サイクル C の点 2 の圧力 p_2 を p_0 で表せ。
- (2) 点 3 の圧力 p_3 と体積 V_3 を p_0 、 V_0 、 T_0 、 T_H 、 κ で表せ (これらのなかから必要な記号を用いて解答せよ。以下同様)。
- (3) 点 4 の圧力 p_4 と体積 V_4 を p_0 、 V_0 、 T_0 、 T_H 、 κ で表せ。

- (4) 過程 $1 \rightarrow 2$ および過程 $3 \rightarrow 4$ で系に出入りする熱 [J] をそれぞれ Q_{12} , Q_{34} とするとき, Q_{12} , Q_{34} を T_0 , T_H , m , R で表せ. また, それらの比 Q_{12}/Q_{34} を求めよ.
- (5) 点 2 と点 4 のエントロピー S_2 , S_4 を求めて, S_0 , m , R で表せ.
- (6) サイクル S の点 A の圧力を p_0 , T_0 , T_H , κ で表せ.
- (7) 過程 $1 \rightarrow A$ および過程 $3 \rightarrow B$ で系に出入りする熱をそれぞれ Q_{1A} , Q_{3B} とするとき, それらの比 Q_{1A}/Q_{3B} を T_0 , T_H で表せ.
- (8) 過程 $B \rightarrow 1$ および過程 $A \rightarrow 3$ で系に出入りする熱をそれぞれ Q_{B1} , Q_{A3} とするとき, Q_{B1} , Q_{A3} を m , c_v , c_p , T_0 , T_H で表せ.
- (9) 過程 $B \rightarrow 1$ で周囲 (外界) に捨てられた熱が, すべて過程 $A \rightarrow 3$ の加熱に再利用できるとき, サイクル S の熱効率 η_S を求めよ.

II. 図 2 に示す単純開放型ガスタービンサイクル (ブレイトンサイクル) について以下の問いに答えよ. なお, 図中の v , r はそれぞれ比体積 [m^3/kg], 圧力比 ($r > 1$) を表す. また, 作動流体は理想気体であり, 開いた系 (運動エネルギーと位置エネルギーが無視できる定常流動系) として解析せよ.

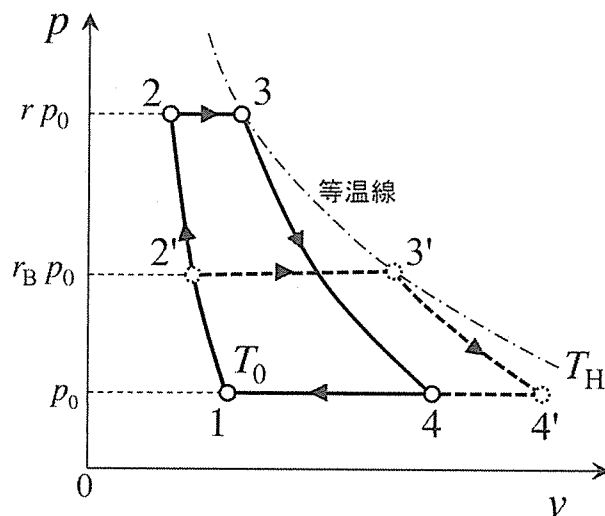


図 2 理想気体の $p-v$ 線図 (開いた系の二つのサイクル)

- (1) 圧力比 r のサイクル A ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$) において, 点 1 と点 3 の温度 T_1 , T_3 をそれぞれ T_0 , T_H とする. このとき, T_2 , T_4 を T_0 , T_H , r , κ で表せ (これらのなかから必要な記号を用いて解答せよ. 以下同様).
- (2) サイクル A において, 作動流体 1 kg あたりの圧縮機での仕事を l_C [J/kg], タービンでの仕事を l_T [J/kg] とするとき, サイクル A の仕事 $l_A = l_C + l_T$ を c_v , c_p , T_0 , T_H , r , κ で表せ.
- (3) 図 2 に示すように, 圧力比 r_B ($r_B > 1$) のサイクル B ($1 \rightarrow 2' \rightarrow 3' \rightarrow 4' \rightarrow 1$) があり, T_3' を T_H とする. サイクル B の仕事 l_B がサイクル A の仕事と同じ値 ($l_B = l_A$) になるとき, 圧力比 r_B を T_0 , T_H , r , κ で表せ.