問題１１　材料物理　設問すべてについて解答すること。

I　原子空孔は熱的な平衡状態として存在するので，高温から急冷することにより室温で過飽和の空孔を凍結することができる。これに関して，次の（1）～（3）の問いについて答えよ。

（1）融点近くから急冷した面心立方構造の結晶を室温で時効したのち透過電子顕微鏡で調べると，積層欠陥に起因するコントラストをもった多数の転位ループが観察されることがある。このような転位ループの形成機構および転位としての特徴について述べよ。

（2）高温から急冷したアルミニウムにおいて，平均直径 200 nm の転位ループが多数観察された。この転位ループ 1 個当たりに含まれる空孔数を有効数字 2 桁まで求めよ。ここで，アルミニウムの単位格子内で (111)面には 2 個分の原子が存在するとし，アルミニウムの格子定数は 0.40 nm とする。

（3）上記の転位ループが $1\,\mathrm{cm}^3$ あたり 2.2×10^{13} 個観察されたとき，凍結された空孔すべて転位ループに関与するものとして，原子空孔濃度(at.%)を有効数字 2 桁で推定せよ。

II　結晶中の拡張転位に関して，次の（1）～（3）の問いについて答えよ。

（1）拡張転位について具体的に説明せよ。

（2）面心立方構造の結晶（格子定数 a）において，(111)面上にバーガース・ベクトル$(a/2)[\bar{1}01]$の転位と$(\bar{1}11)$面上にバーガース・ベクトル$(a/2)[110]$の転位がある。これらの転位がすべり面上の交線上で交わるとき，次式におけるX，YおよびZの転位のバーガース・ベクトルを求めよ。

(111) 面上　　$(a/2)[\bar{1}01] \rightarrow (a/6)[\bar{2}11] + \boxed{\ \mathrm{X}\ }$

$(\bar{1}11)$ 面上　　$(a/2)[110] \rightarrow (a/6)[211] + \boxed{\ \mathrm{Y}\ }$

$$\boxed{\ \mathrm{X}\ } + \boxed{\ \mathrm{Y}\ } \rightarrow \boxed{\ \mathrm{Z}\ }$$

（3）Zの転位はローマー・コットレルの不動転位と呼ばれる。この転位がX，Yの部分転位に比べてエネルギー的に安定に存在する理由を説明せよ。

III　剛体球モデルを用いて，面心立方構造の結晶の理論強度を計算せよ。この場合の理論強度とは，転位を含まない完全結晶において，すべり面（最密原子面）の上半分の結晶を同時にすべらせるのに必要な最大せん断応力のことであり，せん断変形に対する原子間の力をすべり方向の原子間距離と同じ周期の正弦関数で近似するものとする。ただし，剛体球の半径を r，剛性率を G とする。

問題１２　材料プロセス工学　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　図のように拡散セル内の液体 A が蒸発して気相を拡散する。拡散セルの上端($z=z_1$)では、気体 B が気体 A の拡散方向に対して垂直方向にゆっくりと流れており、そこでは常に気体 A のモル分率は x_{A1} となっている。一方、界面の位置 z_0 では平衡状態となっており、そのモル分率を x_{A0} とする。界面での平衡がずれないように、拡散セル全体は一定温度、一定圧力に保持されている。気体 A と B は理想気体で、気体 B は液体 A へは溶解しないとする。

この拡散セル内の拡散に伴い、気体全体に流れが生じる場合の気体 A のモル拡散流束 N_A は、以下の式で与えられる。

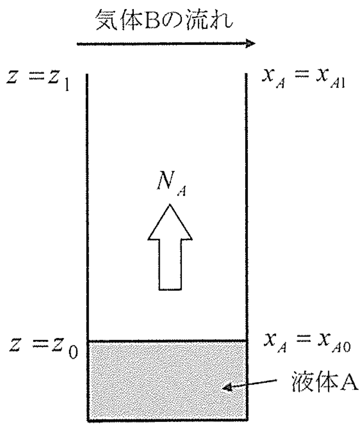

図　拡散セル内の一方拡散

$$N_A=-cD_{AB}\frac{dx_A}{dz}+x_A\left(N_A+N_B\right)$$

ここで c はガスの全モル濃度、D_{AB} は拡散係数である。右辺の第 1 項は流れに乗った座標から見たモル拡散流束で、フィックの第 1 法則である。右辺の第 2 項はバルクフローの項と呼ばれ、拡散に伴うガス本体の流れを表している。次の（1）～（4）の問いに答えよ。

（1）一方拡散($N_B=0$)を仮定した場合の N_A を表す式を求めよ。

（2）定常状態を仮定した場合の拡散方程式は以下の式で与えられる。

$$-\frac{dN_A}{dz}=0$$

一方拡散の N_A を用いて x_A に関する微分方程式を導け。ただし、c および D_{AB} は定数とする。

（3）（2）で導いた微分方程式を以下の境界条件で解き、x_A の分布を表す式を求めよ。

境界条件 1：$x_A=x_{A0}$　at $z=z_0$

境界条件 2：$x_A=x_{A1}$　at $z=z_1$

（4）円柱座標系において、半径 r 方向への一方拡散についても同様に x_A の分布を表す式を求めよ。ただし、モル拡散流束、拡散方程式および境界条件は以下のように表される。

$$N_A=-cD_{AB}\frac{dx_A}{dr}+x_A\left(N_A+N_B\right)$$

$$-\frac{d(rN_A)}{dr}=0$$

境界条件 1：$x_A=x_{A0}$　at $r=r_0$

境界条件 2：$x_A=x_{A1}$　at $r=r_1$

Ⅱ　金属精錬において金属中の不純物をスラグを用いて除去する方法がある。金属中に含まれる不純物がスラグ中へ移行するとき、金属相とスラグ相との界面に二重境膜を仮定して、各相の境膜内の物質移動速度（N_M 、 N_S ）と界面化学反応速度（N_C）は次式で与えられる。

$$N_M = k_M\left(C_M - C_M^i\right)、\quad N_S = k_S\left(C_S^i - C_S\right)、\quad N_C = k_C\left(C_M^i - \frac{C_S^i}{m}\right)$$

ここで、k_M 、k_S は金属相内およびスラグ相内物質移動係数、k_C は化学反応速度定数、m は平衡定数である。また、C は不純物濃度で、下付の M と S はそれぞれ金属相とスラグ相、上付の i は界面を表す。定常状態を仮定すると $N_M = N_S = N_C = N_{OV}$ となる。総括反応速度 N_{OV} を以下の式で表した場合の総括反応速度定数 k_{OV} を k_M 、 k_S 、 k_C 、 m を用いて示せ。

$$N_{OV} = k_{OV}\left(C_M - \frac{C_S}{m}\right)$$

Ⅲ　1 次反応の場合、反応が 0%から 99.9%まで起こる場合に要する時間は半減期の何倍になるか求めよ。ただし、ln2＝0.693、ln10＝2.303 とする。

問題１３　量子力学　設問すべてについて解答すること。

I　量子力学におけるポテンシャル問題を考える。以下の（1）～（6）の問いに答えよ。

ポテンシャルが以下で与えられる一次元量子系を考える。粒子の質量を m とする。

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x < -L, & \text{領域 I} \\ 0\,, & -L \le x < L, & \text{領域 II} \\ V_0, & L \le x, & \text{領域 III} \end{cases}$$

ここで x は座標であり，L と V_0 は正の定数である。

（1）エネルギー固有値が $E(>0)$ である定常状態を考える。各領域における時間に依らない波動関数 $\phi(x)$ を，$\phi(x) = \phi_{\mathrm{I}}(x)$, $\phi(x) = \phi_{\mathrm{II}}(x)$, $\phi(x) = \phi_{\mathrm{III}}(x)$, として，各領域におけるシュレーディンガー方程式を書け。$\hbar = h/2\pi$ を用いてよい。ここで h はプランク定数である。

（2）エネルギー固有値 E が $E < V_0$ の場合を考える。波動関数が偶関数，$\phi(x) = \phi(-x)$ である量子状態について，それぞれの領域でシュレーディンガー方程式の解 $\phi_{\mathrm{I}}(x)$ 等を求めよ。$|x| \to \infty$ で $\phi(x) \to 0$ である。各領域の解には定数倍の任意性がある。その定数は規格化および以下の問（3）の連続条件により決まるが，求めなくてよい。ただし，偶関数の条件を満たすようにせよ。解答には，その任意定数が分かるように解を書け。解の波動関数は実関数である。

（3）$x = -L$ および $x = L$ における波動関数およびその微分の連続条件より，上記の任意定数の間の関係式を導け。

以下の問では $V_0 \to +\infty$ の場合を考える。

（4）このとき $x = -L$ および $x = L$ において波動関数は連続であるが，その微分は連続ではない。シュレーディンガー方程式の偶関数の解 $\phi_n(x)$ およびその解が表す量子状態のエネルギー固有値 E_n を求めよ。波動関数は $\phi_{\mathrm{I},n}(x)$ 等，領域ごとに示せ。ここで n は量子数であり，偶関数の解 $\phi_n(x)$ の中でエネルギーが低い順番に $n = 1,2,3,\cdots$ とする。

（5）上記の波動関数を規格化せよ。

（6）上問（5）で求めた波動関数を用い，位置 x の期待値 $\langle x \rangle$ および運動量 p の期待値 $\langle p \rangle$ を計算せよ。

Ⅱ　次の（1）～（8）の問いについて答えよ。

x の関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して以下の量を定義する，

$$\langle f|g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

ここで $f^*(x)$ は $f(x)$ の複素共役を表し，他の記号の場合も同様に，*は複素共役を表すものとする。以下に現れる積分はすべて有限であるとする。

（1）任意の複素定数 α に対して $\langle f|\alpha g\rangle=\alpha\langle f|g\rangle$，$\langle \alpha f|g\rangle=\alpha^*\langle f|g\rangle$ が成り立つことを示せ。

（2）任意の x の関数 $h(x)$ に対して $\langle f|g+h\rangle=\langle f|g\rangle+\langle f|h\rangle$，$\langle f+h|g\rangle=\langle f|g\rangle+\langle h|g\rangle$ が成り立つことを示せ。

（3）部分積分により $\left\langle f\middle|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right\rangle=-\left\langle\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\middle|g\right\rangle$ となることを示せ。ただし，$f(\pm\infty)=0$，$g(\pm\infty)=0$ が成り立つものとする。

ハミルトニアン $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)$ で記述される質量 m の粒子の量子力学を考える。ここで，$V(x)$ はポテンシャルエネルギー（実数である），$\hbar=\frac{h}{2\pi}$，h はプランク定数である。このハミルトニアンの，エネルギー固有値 E_k のエネルギー固有関数を $\phi_k(x)$ と表す。エネルギー固有関数は規格化されており，すべての k で $\langle\phi_k|\phi_k\rangle=1$ が成り立っている。そのため，すべての k で，$\phi_k(\pm\infty)=0$ が成り立つ。

（4）上問（1）～（3）の結果を用いて，$\langle\phi_l|\hat{H}\phi_k\rangle=\langle\hat{H}\phi_l|\phi_k\rangle$ が成り立つことを示せ。ただし

$$\langle\phi_l|\hat{H}\phi_k\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_l^*(x)\left\{\hat{H}\phi_k(x)\right\}\mathrm{d}x,\quad \langle\hat{H}\phi_l|\phi_k\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{H}\phi_l(x)\right\}^*\phi_k(x)\mathrm{d}x \text{ である。}$$

（5）上問（4）の結果を用いて，$E_k\neq E_l$ であれば $\langle\phi_l|\phi_k\rangle=0$ が成り立つことを示せ。

以下，エネルギー固有値に縮退が無い場合を考える。この場合，$k\neq l$ であれば $E_k\neq E_l$ となるから，上問（5）から $\langle\phi_l|\phi_k\rangle=\delta_{kl}$ が成り立つことがわかる。ここで，δ_{kl} は，$k\neq l$ であれば 0，$k=l$ であれば 1 である。N 個のエネルギー固有関数の線形結合で表される波動関数 $\psi(x)=\sum_{k=1}^{N}c_k\phi_k(x)$ を考える。ここで，c_k は複素定数である。

（6）$\psi(x)$ が規格化されているための条件を，c_k を用いて表せ。

$\psi(x)$ は規格化されているものとして，以下の問いに答えよ。

（7）$\psi(x)$ によるエネルギー期待値 $\langle\psi|\hat{H}\psi\rangle$ を，E_k および c_k を用いて表せ。

（8）$|c_k|^2$ はどのような物理的意味を持つか書け。

問題１４　電気回路・電子回路　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　図１の回路において、E は交流電源電圧、Z_1 および Z_2 は誘導性負荷のインピーダンス、I_1 および I_2 は電流である。$E = 100 + \mathrm{j}0$ [V]、$Z_1 = 4 + \mathrm{j}3$ [Ω]、I_2 の実効値 $|I_2|$ は 10 [A]、E と Z_2 のみで構成される回路においては力率が 0.6（遅れ）であるとき、次の（１）～（４）の問いについて単位を付けて答えよ。ただし、解答に根号が含まれる場合には、根号のままで良い。また、（４）の単位は不要である。

（１）電流 I_1 の実効値 $|I_1|$ を求めよ。

（２）インピーダンス Z_2 を求めよ。

（３）回路の有効電力を求めよ。

（４）回路の力率を求めよ。

次に、図１の回路のインピーダンス Z_1 および Z_2 に並列にインピーダンス Z_3 を接続して、図２の回路とする。インピーダンス Z_3 接続後の回路の有効電力は接続前と変わらず、回路の力率が 0.8（遅れ）になるとき、次の（５）および（６）の問いについて単位を付けて答えよ。

（５）インピーダンス Z_3 での無効電力を求めよ。

（６）インピーダンス Z_3 を求めよ。

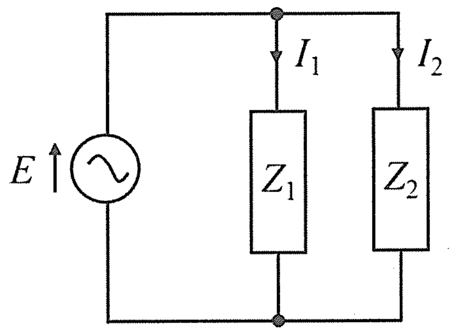

図１

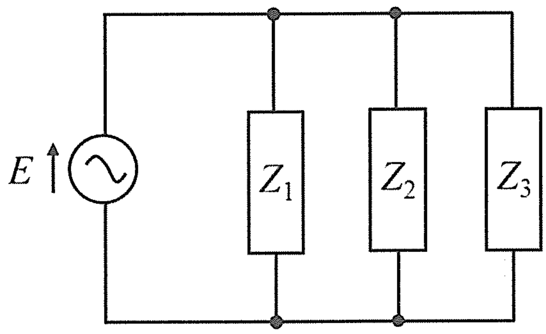

図２

Ⅱ　図３に示すトランジスタ増幅回路について以下の問いに答えよ。$R_1 = 37\mathrm{k}\Omega$、$R_2 = 13\mathrm{k}\Omega$、$R_C = 3\mathrm{k}\Omega$、$R_E = 2\mathrm{k}\Omega$、$R_L = 6\mathrm{k}\Omega$、$V_{CC} = 10\mathrm{V}$ とする。（７）を除く全ての解答には単位をつけること。全て、数式でなく数値で解答すること。解答の導出過程も示すこと。

A．まず、直流電圧源 V_{CC} に対する動作について、直流バイアス等価回路を考える。$I_B \ll I_C$ であり、$I_C = I_E$ と近似できるものとする。ベース-エミッタ電圧 V_{BE} は 0.6V で一定と近似できるものとする。

（１）ベース電位 V_B を求めよ。ただし $I_B \ll I_{R2}$ とする。

（２）エミッタ電位 V_E を求めよ。

（３）エミッタ電流 I_E を求めよ。

（４）コレクタ電位 V_C を求めよ。

B．次に、交流信号源 v_{IN} に対する動作について、小信号等価回路を用いて考える。トランジスタの h パラメータは表１の通りとする。ただし、交流信号源の周波数に対して C_1 、C_2 、C_E のインピーダンスは十分小さく、また、トランジスタの周波数特性は無視できるものとする。直流電圧源は交流に対して短絡とみなせることに注意せよ。

（５）入力端子から右側を見た、この回路の入力インピーダンス Z_{IN} を求めよ。四捨五入して有効数字３桁で解答せよ。

（６）出力端子から左側を見た、この回路の出力インピーダンス Z_{OUT} を求めよ。

（７）電圧増幅率 $A_v = v_{OUT}/v_{IN}$ を求めよ

（８）$v_{IN} = v_i \sin(\omega t)$ とするとき、v_{OUT} が正弦波となる最大の入力電圧振幅 v_i を求めよ。

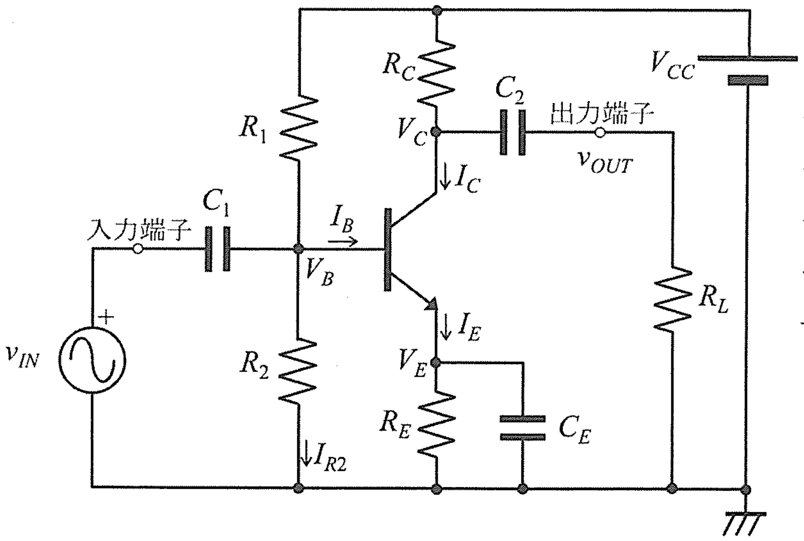

図３

表１

入力インピーダンス	h_{ie}	1 kΩ
電流増幅率	h_{fe}	100
電圧帰還率	h_{re}	0
出力アドミタンス	h_{oe}	0 S

問題１５　電磁気学　設問すべてについて解答すること。

I　図１のように，z 軸上に，長さが $2L$ で太さが無視できる直線状導線が置かれている。この導線上に電荷 Q が一様な線密度で分布している。媒質は真空であるとし，誘電率を ε_0 とする。

（１）電荷の線密度を求めよ。

（２）円筒座標系で表した xy 平面内の点 $\mathrm{P}(\rho,\phi,0)$ における電位 V が

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{L+\sqrt{L^2+\rho^2}}{\rho}$$

で与えられることを示せ．ただし，電位の基準点を無限遠とする。また，この導線単体の静電容量 C を求めよ。

（３）点 $\mathrm{P}(\rho,\phi,0)$ における電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ を円筒座標系で表せ。ただし，円筒座標系の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ とする（図１参照)。

次に，図２に示すように，xy 平面上に原点Oを中心として正方形ループの導線が置かれている。正方形ループは一辺の長さが $2L$ で，導線の太さは無視できる。この正方形ループの導線に電荷 Q が一様に分布している。

（４）z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,0,z)$ $(z>0)$ における電界は z 成分のみをもち，その電界成分 E_z は次式の形で表される。空欄 (a) および (b) に入る式を求めよ。

$$E_z=\frac{Q\,z}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+\boxed{\text{(a)}}\right)\sqrt{z^2+\boxed{\text{(b)}}}}$$

（５）点Pにおける電界成分 E_z は図３のような分布をし，$z=z_0$ において最大値 $E_{\max}$ をとる。E_z の最大値をとる位置が $\log E_z$ を最大にする位置と同一であることを利用して，z_0/L を求めよ。

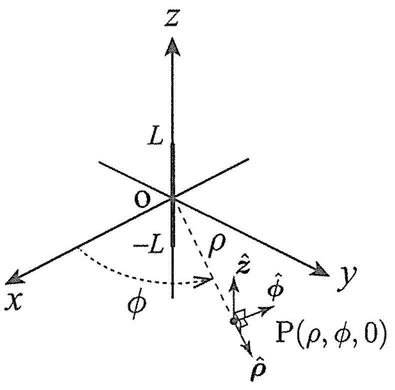

図１

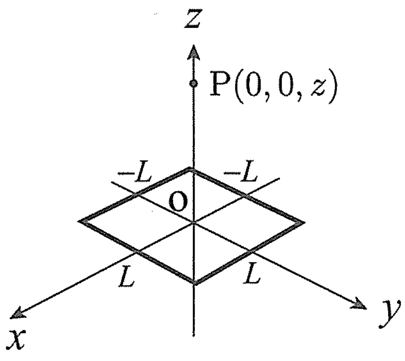

図２

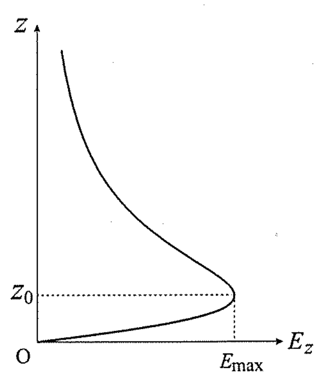

図３

II　図４に示すように，無限に長い直線状導体と平行に距離d離れて同一平面内に置かれた一巻の長方形コイルがある。無限に長い直線状導体には，電流I_1が流れている。また，長方形コイルの２辺の長さは，それぞれa，$2b$である。媒質は真空であり，透磁率をμ_0とし，導線とコイルの太さは無視できるとする。

（１）直線状導体から最短距離がrの点での磁束密度Bを求めよ。

（２）長方形コイルと鎖交する磁束φを求めよ。

（３）直線状導体と長方形コイルの相互インダクタンスMを求めよ。

（４）PQ を中心軸として長方形コイルを角周波数ωで回転させたとき，コイルに発生する起電力eの大きさを求めよ。ただし，dはbに比べて十分に大きく，電流I_1が長方形コイル上につくる磁場は，コイル面に垂直な方向を向き，その方向においてコイル面から$\pm b$の範囲で一定の大きさであるとする。

（５）（４）において長方形コイルの抵抗をRとするとき，長方形コイルが図４の位置から半回転する間に消費される電気エネルギーWを求めよ。

（６）長方形コイルを図のように固定し，時計回りに電流I_2を流した時，長方形コイルにはたらく力Fの大きさと方向を求めよ。

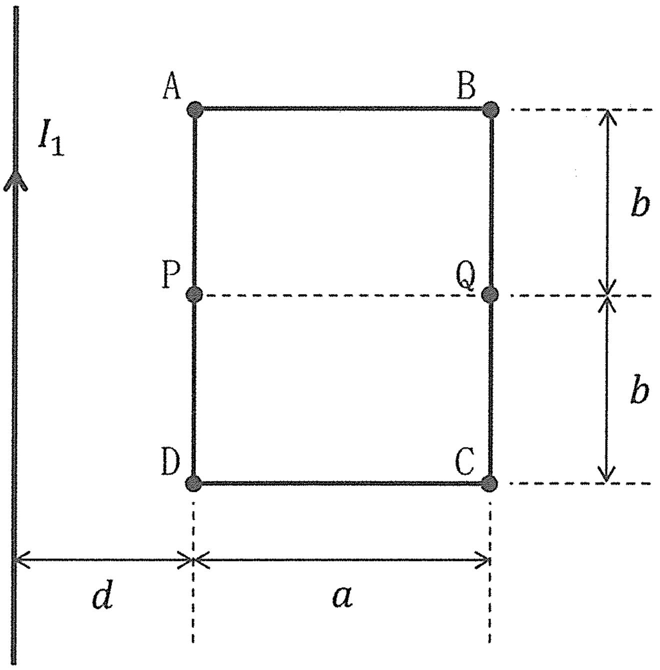

図４

問題１６　電子物性　設問すべてについて解答すること。

代表的な不純物半導体として，シリコン（Si）が知られている。Si のエネルギーバンドギャップ E_g を 1.1eV とする。

（１）不純物として，燐（P）を Si に加える。そのイオン化エネルギーを 0.1eV とする。P を加えたときの Si のエネルギーバンド図を解答用紙に描き，E_g と不純物準位の関係を示せ。

（２）P はドナー，アクセプターのいずれとして働くかを理由とともに述べよ。

（３）Si の電子密度 n_c (m^{-3}) の温度特性は図１のようになった。温度特性には図中に示されるように三つの領域がある。試料の温度 T (K) を上げていった場合，それぞれの領域で起こる現象を，エネルギーバンド図を用いて説明せよ。

（４）この Si 試料に単一光を照射しながら n_c (m^{-3}) を測定する。波長 1μm，10μm，15μm の光を照射した試料の n_c (m^{-3}) の温度特性を，解答用紙に図１のグラフを転記して，そこに示せ。またその理由を述べよ。ただし、照射した光のエネルギーはすべて電子の励起に使われ，キャリア寿命の温度依存性は無視できるものとする。必要があれば，真空の光速 $c = 3.0\times10^8$ m/s，プランク定数 $h = 6.6\times10^{-34}$ J·s を使うこと。

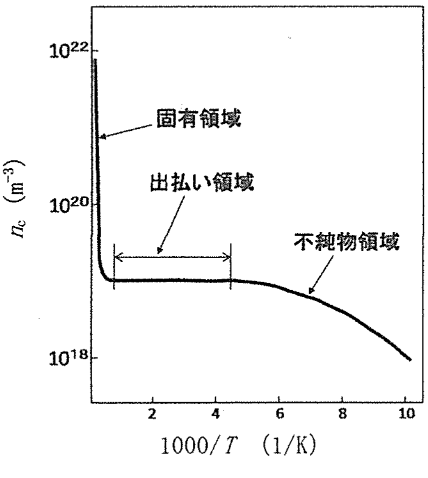

図１

問題１７　制御工学　　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　図１に示すように，質量Mの物体がバネ定数Kのバネと粘性減衰係数（粘性抵抗係数）Bのダッシュポット（ダンパ）を介して箱の一端に接続されている。図中，$x(t)$は箱の変位，$y(t)$は箱と質量Mの相対変位であり，箱と質量Mの物体の運動はx方向に拘束され，摩擦は無視できる。初期値を０とし，入力として箱に変位$x(t)$を与えたときの出力$y(t)$までの伝達関数を求めよ。

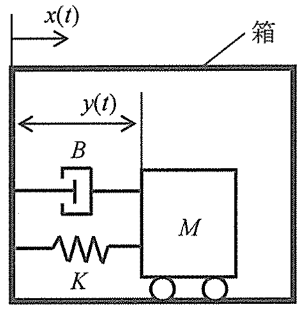

図１　質量―バネ―ダッシュポット系

Ⅱ　図２に示すシステムを考える。このシステムの伝達関数が$G(s)=\dfrac{ps+q}{s^2+2s+4}$であった。ただし，$p$および$q$は実定数である。次の(1)と(2)の問いに答えよ。

(1) このシステムの極をすべて求めよ。

(2) このシステムにある周波数の正弦波の入力を入れた。十分時間がたった後の入力信号$u(t)$および出力信号$y(t)$は図３であった。ただしTは適当な時刻である。このとき，pおよびqの値を求めよ。

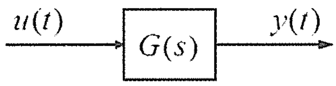

図２　システム

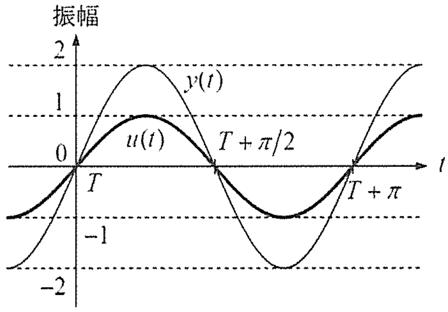

図３　入出力信号

Ⅲ　図４のフィードバック制御系について考える。$R(s), U(s), Y(s), D_1(s), D_2(s)$はそれぞれ目標値$r(t)$，操作量$u(t)$，制御量$y(t)$，入力外乱$d_1(t)$，観測外乱$d_2(t)$のラプラス変換を表す。伝達関数は$H_1(s)=\alpha/s$，$H_2(s)=\beta$，$H_3(s)=\gamma$である。ただし$(\alpha,\beta,\gamma)$は正の実数とする。$R(s)$から$U(s)$までの伝達関数が$7s/(s+6)$，$D_1(s)$から$Y(s)$までの伝達関数が$2/(s+6)$，$D_2(s)$から$Y(s)$までの伝達関数が$-6/(s+6)$であった。伝達関数$H_1(s), H_2(s), H_3(s)$の中の$(\alpha,\beta,\gamma)$の値を求めよ。

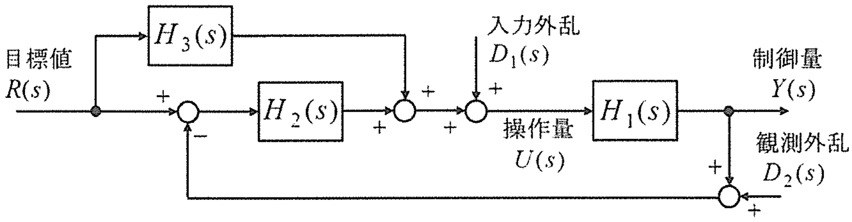

図４　フィードバック制御系

Ⅳ　図５のフィードバック制御系について考える。$R(s)$，$Y(s)$は，それぞれ目標値$r(t)$，制御量$y(t)$のラプラス変換を表す。

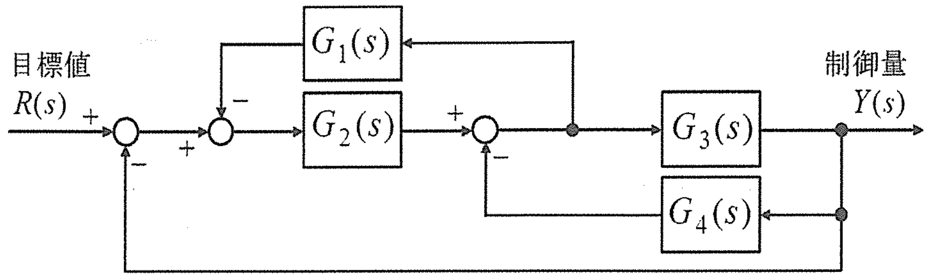

図５　フィードバック制御系

まず，次の(1)の問いに答えよ。

(1)　$R(s)$から$Y(s)$までの伝達関数を，伝達関数$G_i(s)$ $(i=1,\cdots,4)$を用いて表せ。

つぎに，図５において　$G_1(s)=0,\ G_2(s)=16,\ G_3(s)=\dfrac{1}{s(s-3)},\ G_4(s)=as$　とおく。aは実数とする。次の(2)，(3)の問いに答えよ。

(2)　目標値がステップ関数であるときの制御量の時間応答が減衰振動し，最終的に一定値に収束するための　a　の範囲を求めよ。

(3)　$a=13$　とおく。目標値が単位ステップ関数であるときの制御量の時間応答を求めよ。

最後に，図５において　$G_1(s)=0,\ G_2(s)=\dfrac{b}{s},\ G_3(s)=\dfrac{1}{s(s-3)},\ G_4(s)=13s+2$　とおく。bは実数とする。次の(4)，(5)の問いに答えよ。

(4)　図５のフィードバック制御系が安定となるbの範囲を求めよ。

(5)　目標値が単位ランプ関数であるとき，その定常偏差e_sの絶対値が0.5以下（すなわち$|e_s|\le 0.5$）となる　b　の範囲を求めよ。ただし定常偏差e_sは

$$e_s=\lim_{t\to\infty}\{\,r(t)-y(t)\,\}$$

と定義する。

問題１８　力学・材料力学　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　水平面上に鉛直に立った半径R，中心点Ｏの半円形のレールが設置されており，最下点Ａで質量mの質点Ｐにレールに沿って初速v_0を与えレール上を運動させる。質点Ｐはレールと連結されておらず，円運動の条件を満足しなくなれば，レールから外れて落下する。図１のとおりＯＡとＯＰのなす角をθとする。重力加速度をgとし，摩擦や空気抵抗は考えなくてよい。レール上を運動している物体Ｐについて，次の（１）～（６）の問いに答えよ。解答に必要な量が問題文中で与えられていない場合は，適宜定義して用いること。

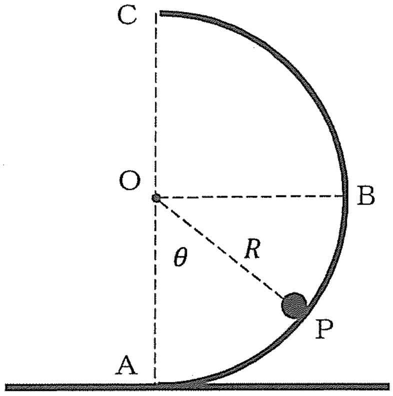

図１

（１）質点Ｐがレールから受ける垂直抗力を，質点Ｐの速度vとθで表わせ。

（２）角度方向（接線方向）の運動方程式を書け。

（３）力学的エネルギー保存則の式を質点Ｐの速度vとθを使って書け。

（４）質点Ｐが中心点Ｏと同じ高さの点Ｂを通過するときの速さと角運動量の大きさを求めよ。

（５）質点Ｐが最下点Ａにレール上を動いて戻ってくるための初速v_0の条件を求めよ。

（６）質点Ｐが最上位点Ｃを通過するための初速v_0の条件を求めよ。

Ⅱ　一辺の長さがaの均質な正方形板（質量M）が鉛直平面内で吊り下げられ，図２のように点Ａおよび点Ｂで，ピン支持されている。重心Ｇを原点として，図のようにx軸，y軸をとり，紙面と垂直にz軸をとり，重力加速度をgとして，以下の問いに答えよ。

（１）ピンＡにおける支持反力を示せ。

（２）この正方形板の重心Ｇを通るz軸に関する慣性モーメントI_zは，$Ma^2/6$と表すことができる。平行軸の定理を用いて，点Ｂを通りz軸に平行な回転軸に関する慣性モーメントI_{Bz}が$2Ma^2/3$と表せることを示せ。

（３）点Ａのピンを取り除くと，この正方形板は，重力により，点Ｂを中心に回転した。BDが鉛直になった時の正方形板の角速度ωを，質量M，一辺の長さa，重力加速度gを用いて示せ。

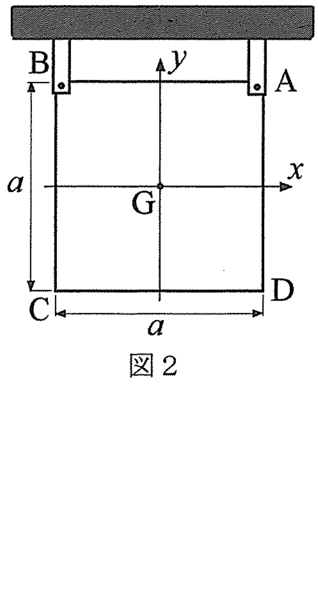

図２

Ⅲ　次の（１）～（３）について鉄鋼の値として最も近いものを選び，(a), (b), (c)で答えよ。

（１）縦弾性係数　E　(a) $E = 200$ [kPa]　(b) $E = 200$ [MPa]　(c) $E = 200$ [GPa]

（２）横弾性係数　G　(a) $G/E = 0.4$　(b) $G/E = 1$　(c) $G/E = 3$

（３）ポアソン比　ν　(a) $\nu = 0.1$　(b) $\nu = 0.3$　(c) $\nu = 0.6$

Ⅳ　図３に示す長さ $4a$ の真直なはり AB を考える。はりは一様で断面二次モーメントは I，縦弾性係数は E である。左端 A を剛体壁に固定し，右端 B を移動支点で支持する。はりの中央断面Ｃから左に出た長さ a の剛体の腕の先Ｄに大きさ P の集中荷重が下向きに作用し，CB 間に単位長さあたりの大きさ P/a の一様分布荷重が下向きに作用するときの，支点 A, B の支点反力を R_A, R_B（いずれも上向き正)，支点 A での曲げモーメントを M_A とする。左端 A に原点を置き，はりに沿って右向きに x 軸を，下向きに y 軸をとる。このはりについて次の（１）～（５）の問に答えよ。

（１）　y 軸方向の力のつりあい式と，右端Ｂ点まわりのモーメントのつりあい式を答えよ。

（２）　座標 x における断面の曲げモーメント $M(x)$ を答えよ。

（３）　たわみ曲線を求めるための境界条件を全て挙げよ。

（４）　支点反力 R_A，R_B と，固定端のモーメント M_A とを P, a を用いて表せ。

（５）　せん断力図（SFD）と曲げモーメント図（BMD）を描け。

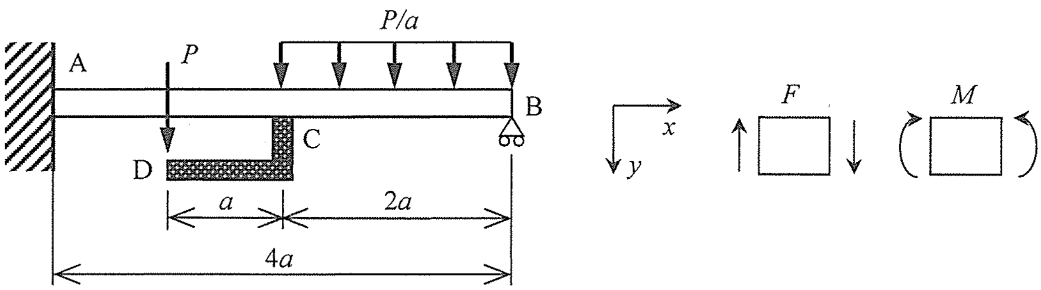

図３

問題１９　流体工学　設問すべてについて解答すること。

解答の注意：解答用紙の表面に設問 I を，裏面に設問 II を記入すること。また各設問の小問の解答について，<u>（1）$x = y + z$</u> のように，最終的な解答に小問の番号を付して下線で明記すること。

I　プロペラの回転による推力について考える。ここでは簡単のためプロペラの詳細は問題にせず，プロペラの回転面を仮想的な円板で置き換えて考える。この仮想円板は流れ方向に厚みはなく，流体がこれを通り過ぎるとき，単に流れにエネルギーを供給する役割をもつ。

図 1 は速さ v_1, 圧力 p_∞, 密度 ρ の空気の一様な流れの中に，断面積 A の仮想円板を静止させて置いたときに生じる流れを示している。この仮想円板は，図 1 に示すように流管の断面になっている。流れ方向を x 軸の正の向きにとる。円板より十分上流の断面①（断面積 A_1）で速さ v_1，圧力 p_∞ である流れは，円板に近づくにつれてその速さは連続的に増加し，円板を横切るところで v（$>v_1$）になる。この流れの加速に伴って圧力は低下し，円板前面で p_u（$<p_\infty$）になる。圧力は円板後面で p_d（$>p_\infty$）に上昇し，そこから下流に向かって徐々に低下していき，円板より十分下流の断面②（断面積 A_2）で p_∞ に戻る。この圧力の減少分が運動エネルギーに変換されて流れの速さは増加し，断面②で v_2（$>v_1$）になる。ただし，流れの速さや圧力は各断面内で一様であるとする。また流管の周囲の圧力は p_∞ とし，空気の粘性や密度の変化は考慮せず，流れは定常であるとして以下の小問に答えよ。なお問題文中に特に指定がない場合には，ρ，p_∞，A，v，v_1，v_2 の中から適切な記号を用いて解答すること。

（1）断面積 A_1，A_2 をそれぞれ与えられた記号を用いて表せ。

（2）図 1 中の流管および断面①，②を検査面として使い，運動量変化を調べる。流体が円板に及ぼす力（推力）F を求めよ。

（3）円板の前方および後方の流れについてそれぞれベルヌーイの定理を適用し，円板前後での圧力増加 $p_d - p_u$ を求めよ。

（4）円板にかかる推力 F は，円板前後での圧力増加によるものと解釈できる。小問（2），（3）の結果を用いて v を v_1, v_2 を用いて表せ。

（5）円板に供給される動力 P_{in} は，円板を通過する空気の単位時間あたりのエネルギー増加に等しい。動力 P_{in} を求めよ。

上記の問題は，円板が作り出す動力 P_{out} により，静止した空気中を速さ v_1 で x 軸の負の向きに円板が運動している問題と見なせる。以下の小問に答えよ。

（6）動力 P_{out} を求めよ。また，この円板の推進効率 P_{out}/P_{in} を求めよ。

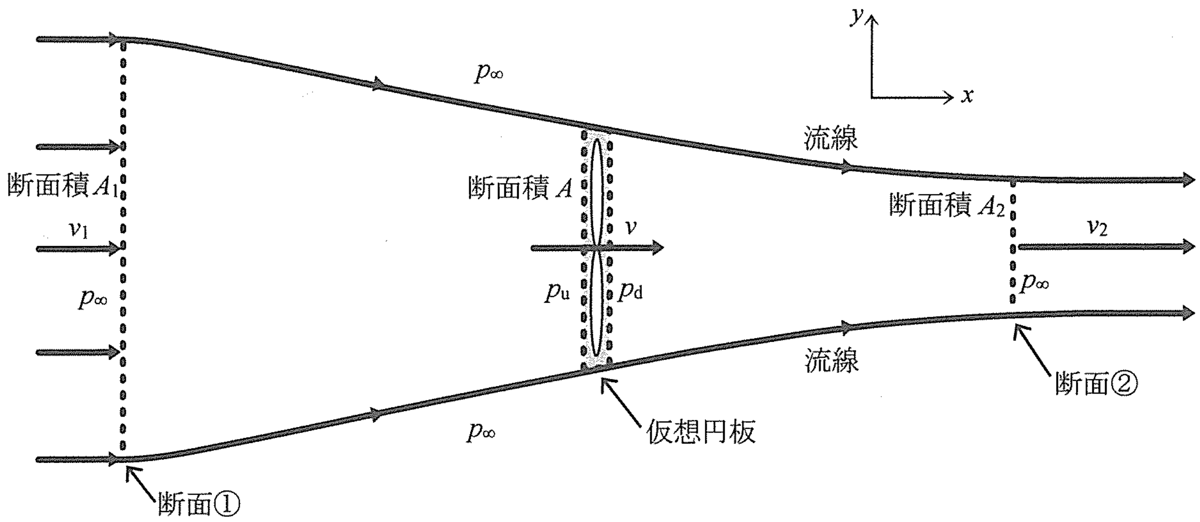

図 1

【次ページに続く】

II　図２に示すように，$x-y$ 平面上の y 軸に平板（壁面）があり，点 $A(x,y)=(a,0)$（ただし，$a>0$）に強さ q の吹き出しがある２次元ポテンシャル流れについて考える。壁面が流線となるように鏡像の方法を用いて，以下の小問（１）～（４）に答えよ。ただし，流体の密度をρ，複素数を $z=x+iy$（i は虚数単位）とする。

（１）　この流れの複素ポテンシャル $W(z)$を z の関数として求めよ。

（２）　x 方向および y 方向速度成分 u および v を求めよ。

（３）　$y>0$ の領域において，y 軸上での y 方向速度成分 v が最大となる座標$(x,\ y)$および最大速度 v_{max} を求めよ。

（４）　壁面上の点 $B(0,b)$と点 $C(0,\ -c)$の間の圧力差$\Delta p=p_B-p_C$を求めよ。ここで，$b>0$，$c>0$ である。

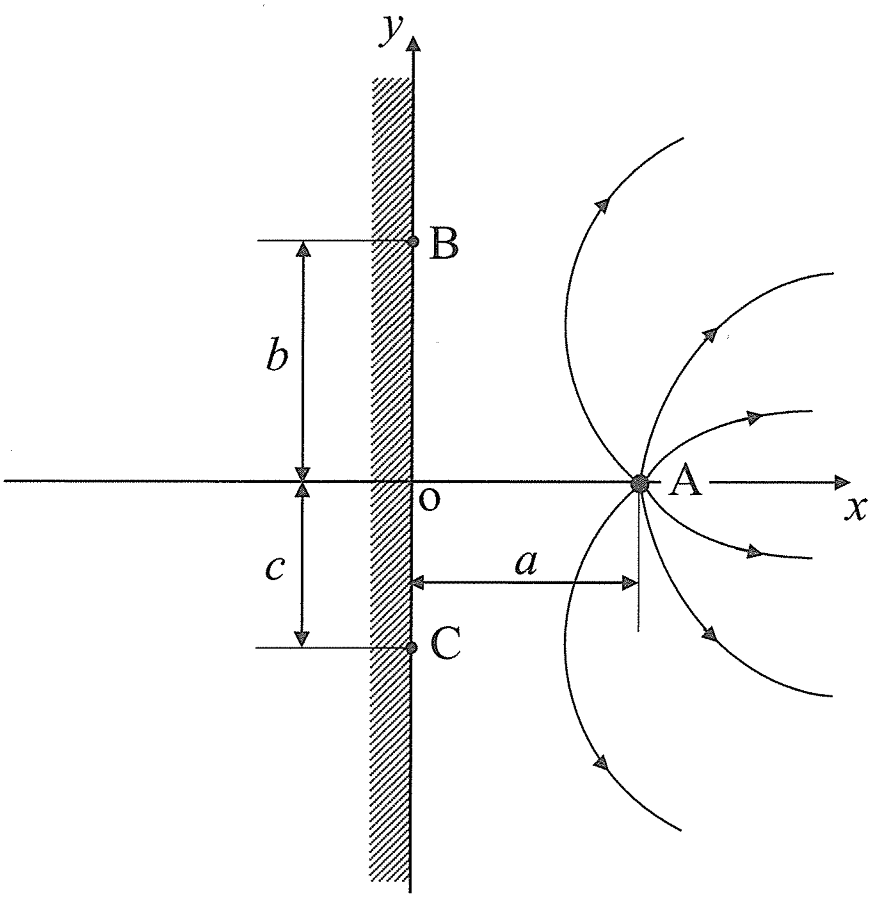

図２

問題２０　熱力学　設問すべてについて解答すること。

I　質量 1 kg，ガス定数 R [J/(kg・K)]，比熱比 κ の理想気体を作動流体とする閉じたサイクル（準静的過程）について考える。このガスサイクルでは，状態 1（圧力 p_1 [Pa]，体積 V_1 [m^3]，温度 T_1 [K]）から状態 2（圧力 p_2 [Pa]，体積 V_2 [m^3]，温度 T_2 [K]）まで可逆断熱過程（等エントロピー過程）で圧縮した後に，状態 2 から状態 3（圧力 p_3 [Pa]，体積 V_3 [m^3]，温度 T_3 [K]）まで等圧加熱し，次に状態 3 から状態 4（圧力 p_4 [Pa]，体積 V_4 [m^3]，温度 T_4 [K]）まで可逆断熱過程（等エントロピー過程）で膨張させ，状態 4 から等積冷却で状態 1 に戻る。ここで，サイクルの特性を示すパラメータとして，圧縮比$\varepsilon = V_1 / V_2$および温度比$\tau = T_3 / T_1$を定義する。なお，熱の符号は，熱が系に入る場合を正，出る場合を負とする。仕事の符号は，系が仕事をする場合を正，仕事をされる場合を負とする。

（1）　状態 2 での温度 T_2 を，κ，ε，T_1 のみを用いて示しなさい。

（2）　状態 3 での体積 V_3 を，κ，ε，τ，V_1 のみを用いて示しなさい。

（3）　状態 4 での温度 T_4 を，κ，ε，τ，T_1 のみを用いて示しなさい。

（4）　状態 2 から状態 3，状態 4 から状態 1 の各過程で出入りする熱 Q_{23}，Q_{41}（単位はすべて[J]）を求めなさい。ただし，κ，ε，τ，R，T_1 のみを用いて示すこと。

（5）　状態 2 から状態 3 の過程でのエントロピーの変化 ΔS_{23}（単位は[J/K]）を求めなさい。ただし，κ，ε，τ，R のみを用いて示すこと。

一般に，熱機関では可逆断熱変化の実現が難しく熱の出入りが生じる。以下では，状態 3 から状態 4 の可逆断熱過程が，ポリトロープ指数を n（$n > \kappa$）とするポリトロープ過程となり，状態 4 が状態 4'（圧力 $p_{4'}$ [Pa]，体積 V_4 [m^3]，温度 $T_{4'}$ [K]）にずれてサイクルを構成する場合を考える。ただし，$p_{4'} > p_1$（$T_{4'} > T_1$）とする.

（6）　状態 4'における温度 $T_{4'}$を求めなさい。ただし，n，κ，ε，τ，T_1 のみを用いて示すこと。

（7）　状態 3 から状態 4'の過程での仕事 $W_{34'}$ [J]を，n，κ，ε，τ，R，T_1 のみを用いて示しなさい。

（8）　状態 3 から状態 4'の過程でのエントロピーの変化$\Delta S_{34'}$ [J/K]を，n，κ，ε，τ，R のみを用いて示しなさい。

Ⅱ　エネルギーの質を評価する上で重要となるエクセルギーを，静的な閉じた系（力学的エネルギーが無視できる非流動系）に対して考える。エクセルギーは，周囲環境と温度や圧力が異なる系が，環境と同じ温度や圧力に達するまでに取り出し得る最大仕事である。ここでは，作動流体を，質量 m [kg]，ガス定数 R [J/(kg・K)]，定圧比熱 c_p [J/(kg・K)]，比熱比 κ の理想気体とする。作動流体のエクセルギー，内部エネルギー，エントロピー，圧力，体積，温度は，それぞれ E [J]，U [J]，S [J/K]，p [Pa]，V [m^3]，T [K]で表す。また，環境温度，環境圧力を，それぞれ T_0 [K]，p_0 [Pa]とする．なお，化学エクセルギーは考慮に入れない。このとき，熱力学の第 1 法則および第 2 法則を用いると，次に示すエクセルギーに関する式が得られる。

$$dE = -dU + T_0 dS - p_0 dV$$

（1）　作動流体の圧力 p が環境圧力と同じ p_0 の条件で等圧変化する場合の dE [J]を求めなさい。ただし，m，c_p，T_0，T のみを用いて示すこと。

（2）　（1）において，作動流体の初期温度が T_1 [K]である場合のエクセルギーE [J]を求めなさい。ただし，m，c_p，T_0，T_1 のみを用いて示すこと。

以下の設問において，$R = 300$ J/(kg・K)，$\kappa = 1.400$，$T_0 = 300$ K とする。また，加熱時における熱損失は無いものとする。

（3）　$p = p_0$，$T = 300$ K の作動流体が $m = 1$ kg ある。この作動流体を圧力一定のもとで電気加熱して $T = 1200$ K とした。加熱時に投入した電力量 W [J]を求めなさい。ただし，有効数字 3 桁で答えること。

（4）　（3）で加熱された作動流体が持つエクセルギーE [J]およびこの過程におけるエクセルギー効率ηを求めなさい。ただし，$\ln(4) = 1.400$ として計算し，有効数字 3 桁で答えること。

（5）　（3）と同じ電力量で，$p = p_0$，$T = 300$ K の作動流体を圧力一定のもとで $T = 360$ K まで電気加熱した。このとき，加熱できる作動流体の質量 m [kg]を求めなさい。ただし，有効数字 2 桁で答えること。

（6）　（5）の過程におけるエクセルギー効率η'は，（4）で得られたエクセルギー効率ηの何倍になるか求めなさい。ただし，$\ln(1.2) = 0.1800$ として計算し，有効数字 2 桁で答えること。