

平成 31 年度

前 期 日 程

数 学 (120 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は、1 ページから 4 ページまであります。解答用紙は、前 1、前 2、前 3、前 4 の 4 枚からなっています。ページの脱落等に気付いたときは、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答はすべて、各問題の解答用紙の解答欄に記入しなさい。
なお、解答用紙の裏にも解答を記入する場合には、表と上下を逆にして記入しなさい。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の該当欄に志望学科名(社会工学科を志望するものは志望分野名, 創造工学教育課程を志望するものは志望コース名)及び受験番号(2 か所)を左詰めで記入しなさい。
5. 解答用紙の網掛け部分及び※を付した欄には、何も記入してはいけません。
6. 問題冊子の白紙と余白は下書きに適宜利用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

1 定数 $k > \frac{1}{2}$ に対して、 $f(x) = \frac{k}{1+x}$ により曲線 $C: y = f(x)$ を定める。

点 $(-1, 1)$ から C に引いた接線が C に接する点を P とする。点 $(0, k)$ と点 P を通る直線を l とする。曲線 C と直線 l で囲まれる図形を D とする。

- (1) P の座標を求めよ。
- (2) l の方程式を求めよ。
- (3) D の面積 S を求めよ。
- (4) D を直線 $y = \frac{1}{2}$ のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^x > \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) (1) の不等式を使って, $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $\int e^{-\sqrt{x}} dx$ を求めよ。

(4) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\sqrt{x}} dx$ を求めよ。

3 座標平面上に、原点 O を中心とする半径 1 の円周 C と点 $A(2, 0)$ がある。

C 上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) をとり、点 $Q(x(\theta), y(\theta))$ を次の条件を満たすようにとる。

(i) $PQ = PA$

(ii) 半直線 OP は $\angle APQ$ を二等分する

ただし P が $(1, 0)$ または $(-1, 0)$ にあるときには、点 Q は A である。

線分 AP と C の共有点が P だけとなる θ の範囲を $a \leq \theta \leq b$ とする。

(1) a と b の値を求めよ。

(2) $x(\theta)$ と $y(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(3) θ が $a \leq \theta \leq b$ の範囲で変化したときの Q の軌跡を C_1 とする。 C_1 の両端を結ぶ線分と C_1 で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(4) 線分 PQ を $1:4$ に内分する点を R とする。 θ が $a \leq \theta \leq b$ の範囲で変化したときの R の軌跡を C_2 とする。 C_2 の長さ L を求めよ。

4 複素数平面上に 3 点 $A(z)$, $B(z^3)$, $C(z^5)$ がある。

- (1) A, B, C が異なる 3 点となるための z の条件を求めよ。
- (2) 異なる 3 点 A, B, C が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。
- (3) A, B, C が正三角形の頂点になるとき, z^2 の値をすべて求めよ。そのとき, さらに A, B, C がこの順に反時計回りの位置にあるような z をすべて求めよ。
- (4) 直線 AC と直線 BC が垂直であるとき, $|z| < 1$ が成り立つことを示せ。